

Úvod

Matematický popis chování těles při silovém a nesilovém namáhání

Těleso – kontinuum – popis spojitými funkcemi (složitě parciální diferenciální rovnice)

Disciplíny spojené s teorií pružnosti

a) Reologie materiálů – nauka o změně vlastností látek v čase

- ☞ Reologie má dát odpověď na otázku – jaké jsou deformace a napětí v daném bodě daného tělesa v určitém okamžiku

Experimenty a tvorba matematických modelů materiálů

b) Teorie pružnosti – idealizace tělesa (např. ideálně pružné těleso)

- ☞ Pružný stav pevného tělesa je charakterizován tím, že pro každou teplotu tělesa existuje **nezávisle na čase** vzájemná jednoznačná závislost mezi napětími a deformacemi

Hledá se odezva statická případně dynamická na působení sil – napětí a deformace

c) Matematická a aplikovaná teorie pružnosti – zvětšuje se rozsah řešení úloh

d) Lineární a nelineární teorie pružnosti. Plasticita

- ☞ Plasticita - neplatí Hookeův zákon

e) Matematická a aplikovaná teorie plasticity – spousta nových modelů

f) Teorie pružnosti a stavební mechanika – aplikace poznatků na řešení stavebních konstrukcí

Zavádí se řada hypotéz a principů – výchozí předpoklady pro sestavení teorie

Základní hypotézy a principy

Hypotéza o spojitě struktuře tělesa – spojité prostředí (mechanika kontinua)

Jiné teorie – existence individuálních částic – diskrétní teorie pružnosti

Hypotéza o nenapjatém počátečním stavu tělesa (počáteční napětí je rovno nule)

Napětí stanovená v teorii pružnosti nejsou skutečnými napětími v tělese, nýbrž představují jen **přírůstek napětí** ve vyšetřovaných bodech k počátečním napětím v týchž bodech

Materiálový model – ideálně pružný, kulová izotropie, dokonale homogenní

Lineární závislost mezi deformacemi a napětími

Mezi hypotézy lze zahrnout předpoklad, že stav napětí v daném bodě, nezbytný pro posouzení pevnosti materiálu v okolí tohoto bodu je určen stavem přetvoření v témž bodě

Princip lokality účinku rovnovážných zatěžovacích soustav vnějších sil

Saint-Venantův princip lokálnosti

V klasické teorii pružnosti se předpokládá:

- a) Posuvy tělesa jsou malé oproti lineárním rozměrům tělesa
- b) Poměrná protažení tak, i poměrná posunutí (úhly zkosení), v materiálu jsou zanedbatelně malá oproti jedničce
- c) Úhly stočení (deviace) jsou malé oproti jedničce a čtverce úhlů stočení jsou zanedbatelně malá proti poměrným protažením a posunutím

Následkem uvedených předpokladů vypadají z rámce klasické teorie pružnosti úlohy nelineární. Ty se řeší v souladu s nelineárními teoriemi pružnosti

Jednotlivá pole v teorii pružnosti

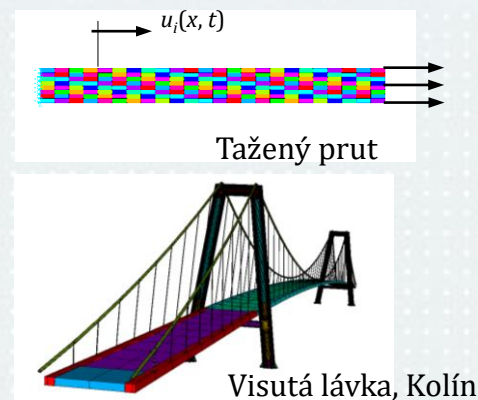
V teorii pružnosti stav tělesa popisuje pomocí polí

1. Pole posunutí
2. Pole deformací (přetvoření)
3. Pole napětí

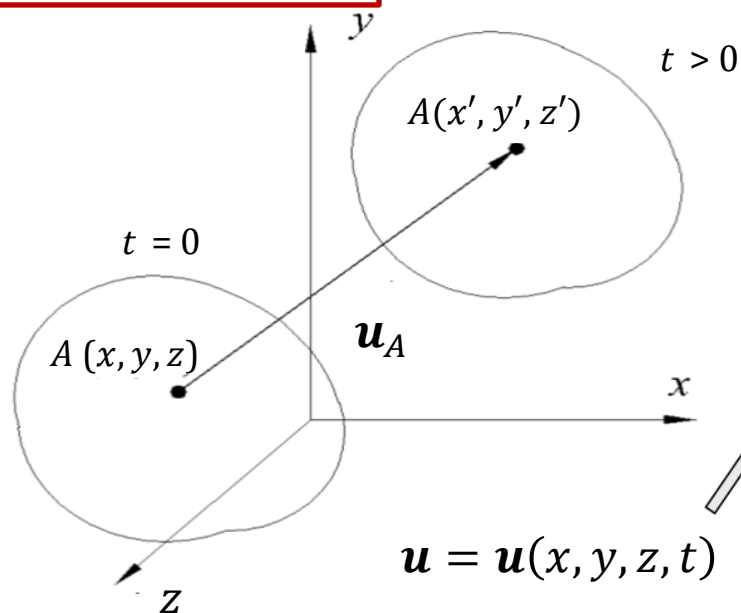
Hledáme základní vztahy mezi jednotlivými složkami polí

1. Deformace $\longleftrightarrow$ Posunutí
2. Napětí $\longleftrightarrow$ Deformace (přetvoření)
3. Další vztahy (např. podmínky rovnováhy, rovnice kompatibility)

V metodě konečných prvků je těleso diskretizováno



Pole posunutí



u_x, u_y, u_z složky vektoru posunutí $\mathbf{u}$

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix} = \{u_x \quad u_y \quad u_z\}^T \quad (1)$$

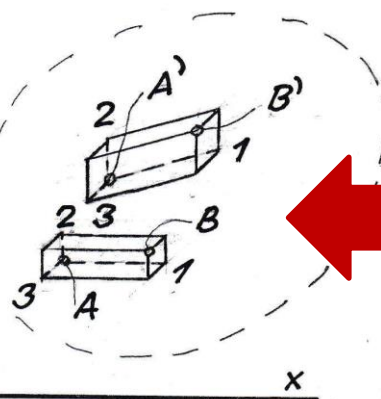
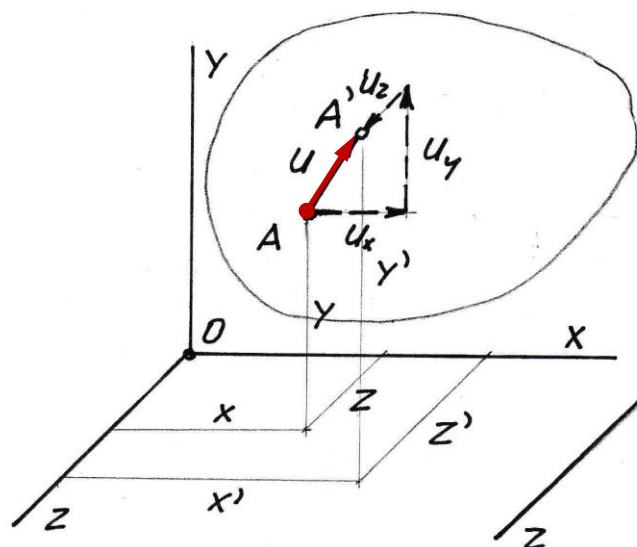
$$\begin{aligned} u_x &= u_x(x, y, z, t) = x' - x \\ u_y &= u_y(x, y, z, t) = y' - y \\ u_z &= u_z(x, y, z, t) = z' - z \end{aligned} \quad (2)$$

Pole posunutí $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, z, t)$

Pole posunutí ve statice $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, z)$

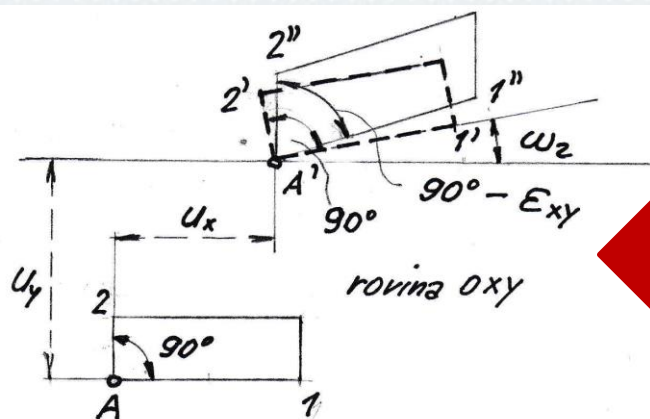
Pole posunutí – pokr.

Označení složek posunutí



Kvádř před deformací
a po deformaci

Složky tuhého pootočení $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ jsou také
funkcemi jednotlivých souřadnic x, y, z, t .

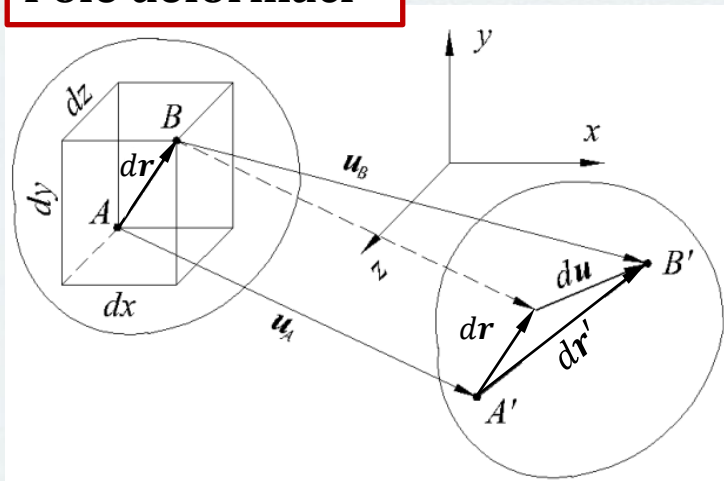


ω_z - složka tuhého pootočení

Průmět kvádru před deformací a po deformaci

V teorii pružnosti a pro reologii nemají
složky tuhého pootočení celkem význam,
neboť nezpůsobují žádných napětí
a přetvoření elementárního kvádru.

Pole deformací



$A(x, y, z), B(x + dx, y + dy, z + dz)$

Dva sousední body po deformaci

Míra deformace

$$d\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} du_x \\ du_y \\ du_z \end{Bmatrix} \quad (3) \quad du_x, du_y, du_z \text{ složky vektoru } d\mathbf{u}$$

$$d\mathbf{r}' = d\mathbf{r} + \underbrace{\mathbf{u}_B - \mathbf{u}_A}_{d\mathbf{u}} = d\mathbf{r} + d\mathbf{u}$$

Kvadrát vzdálenosti mezi body A a B před deformací

$$dr^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

Po deformaci

$$(dr')^2 = (dx + du_x)^2 + (dy + du_y)^2 + (dz + du_z)^2$$

Nechť $x_1 = x$, $x_2 = y$ a $x_3 = z$

Po rozvinutí vektoru $\mathbf{u}_B$ do Taylorovy řady, potom 1. člen $\mathbf{u}_B = \mathbf{u}_A + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u}{\partial x_k} dx_k$

Potom $d\mathbf{u} = \mathbf{u}_B - \mathbf{u}_A = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u}{\partial x_k} dx_k$

$$(dr')^2 = (d\mathbf{r} + d\mathbf{u})^2 = dr^2 + 2d\mathbf{r}d\mathbf{u} + du^2 = dr^2 + 2 \sum_{i,j=1}^3 dx_i \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j + \sum_{i,j,k=1}^3 \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} dx_i dx_j$$

Prostřední člen lze zapsat s využitím

$$\sum_{i,j=1}^3 dx_i \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j = \sum_{i,j=1}^3 dx_j \frac{\partial u_j}{\partial x_i} dx_i.$$

Nakonec $(dr')^2 = dr^2 + 2 \sum_{i,j=1}^3 \varepsilon_{ij} dx_i dx_j$, kde $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right)$ (4)

ε_{ij} jsou složky tenzoru deformace $\boldsymbol{\varepsilon}$. Nebo po rozepsání záměnou x, y a z za i, j

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 \right], \\
 \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} \right)^2 \right], \\
 \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 \right], \\
 \varepsilon_{xy} &= \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \frac{\partial u_z}{\partial y}, \\
 \varepsilon_{yz} &= \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\
 \varepsilon_{zx} &= \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \frac{\partial u_z}{\partial x}.
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

Nelineární části

Složky tenzoru deformace $\boldsymbol{\varepsilon}$ - $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{yz}$, a ε_{zx}

Podrobnosti o uvedených rovnicích budou diskutovány později.

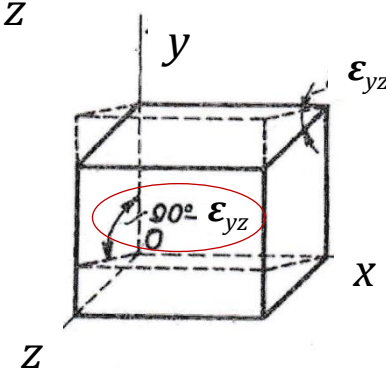
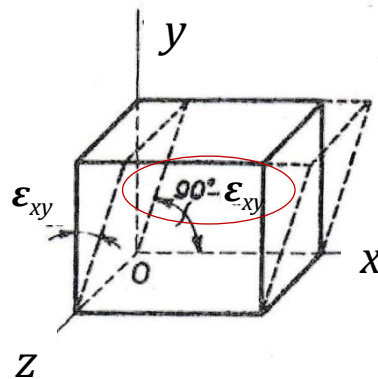
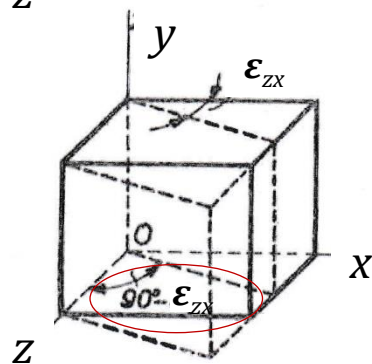
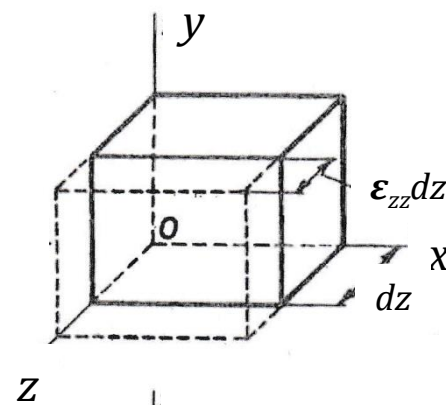
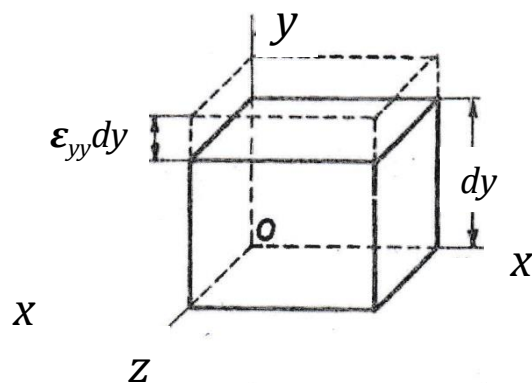
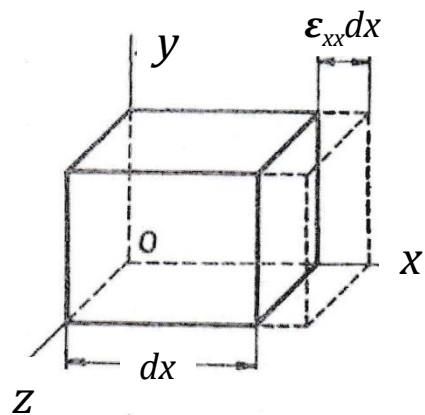
Pole deformací – pokračování

Teorie malých deformací

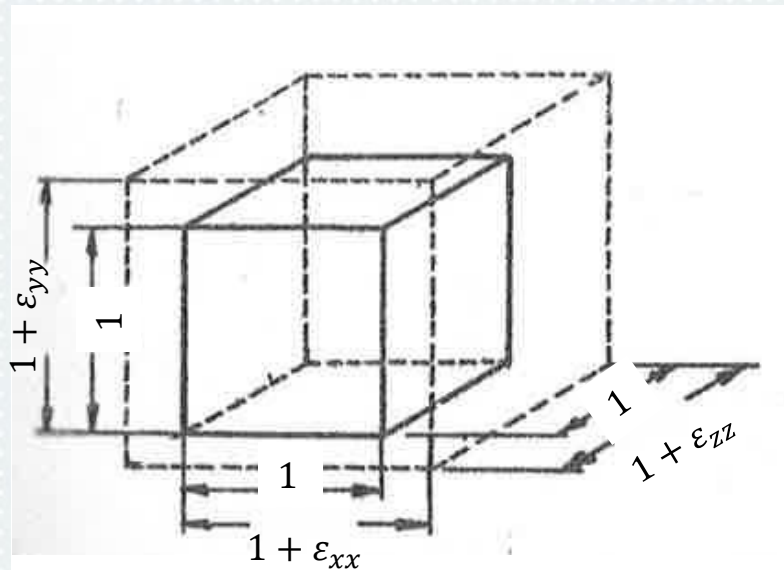
$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (6)$$

- největší posunutí jsou řádově menší než nejmenší rozměr tělesa, největší vzájemné pootočení diferenciálních úseček před a po deformaci jsou menší než $\frac{\pi}{60}$, tj. 3° .

Deformaci libovolného elementárního objemu tělesa, který měl před deformací tvar elementárního kvádru je možno si představit jako řadu jednodušších přetvoření.



Šest složek přetvoření – tři složky protažení hran a tři složky zkosení (poměrné posunutí)
Poměrná protažení hran – **přetvoření prvního druhu** $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}$ – mění se objem i jeho tvar
Zkosení – **přetvoření druhého druhu** $\varepsilon_{xy}, \varepsilon_{yz}, \varepsilon_{zx}$ – po přetvoření zkosením zůstává objem v okolí zkoumaného bodu nezměněn, mění se pouze tvar



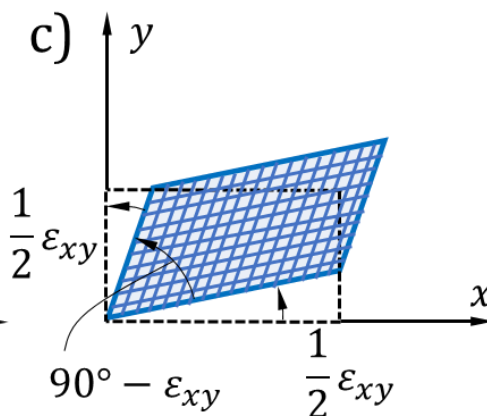
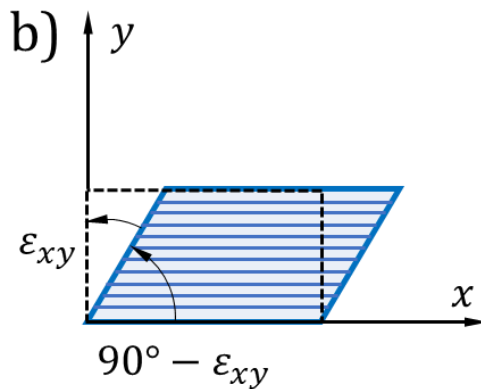
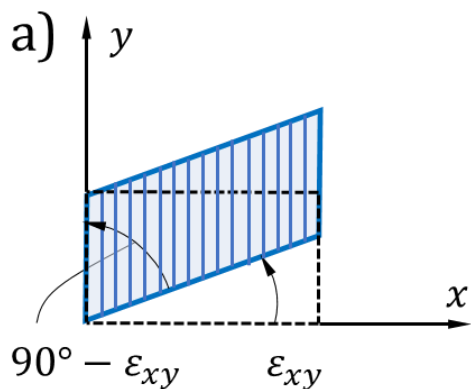
Objemové přetvoření se určí jako součet poměrných protažení ve třech vzájemně kolmých směrech

$$\vartheta = (1 + \varepsilon_{xx})(1 + \varepsilon_{yy})(1 + \varepsilon_{zz}) - 1.$$

Po zanedbání malých veličin druhého a třetího řádu $\vartheta = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}$. (7)

Poměrné objemové přetvoření v bodě se rovná součtu poměrných protažení.

$$\text{Střední protažení } \varepsilon_s = \frac{1}{3}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}), \quad \vartheta = 3\varepsilon_s. \quad (8)$$



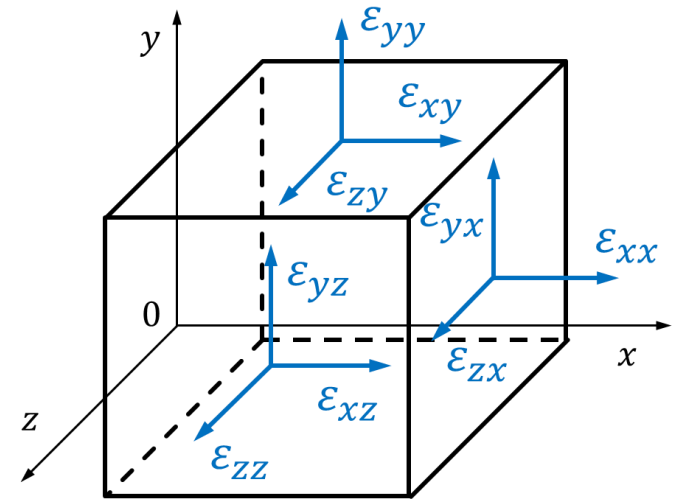
Nejčastěji se uvádí znázornění podle c)

Matice

$$\mathbf{T}_\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2}\varepsilon_{xy} & \frac{1}{2}\varepsilon_{xz} \\ \frac{1}{2}\varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \frac{1}{2}\varepsilon_{yz} \\ \frac{1}{2}\varepsilon_{zx} & \frac{1}{2}\varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (9)$$

se v teorii pružnosti nazývá
tenzorem přetvoření (deformací)

Platí $\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx}, \quad \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy}, \quad \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx}$ (10)



$\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{yz}, \varepsilon_{zx}, \varepsilon_{yx}, \varepsilon_{zy}, \varepsilon_{xz}$

Deformace v libovolném bodě tělesa
je popsána **vektorem**

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} \end{Bmatrix} = \{\varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \varepsilon_{zz} \quad \varepsilon_{xy} \quad \varepsilon_{yz} \quad \varepsilon_{zx}\}^T \quad (11)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}(x, y, z, t)$$

**$\boldsymbol{\varepsilon}$ - vektor složek
deformací**

Poměrné deformace (přetvoření) tělesa jsou v sousedních bodech tělesa obecně různé, v dynamice i funkcí času. Pod vlivem vnějšího zatížení vzniká v tělese stav deformace (pole přetvoření nebo jinak pole deformací).

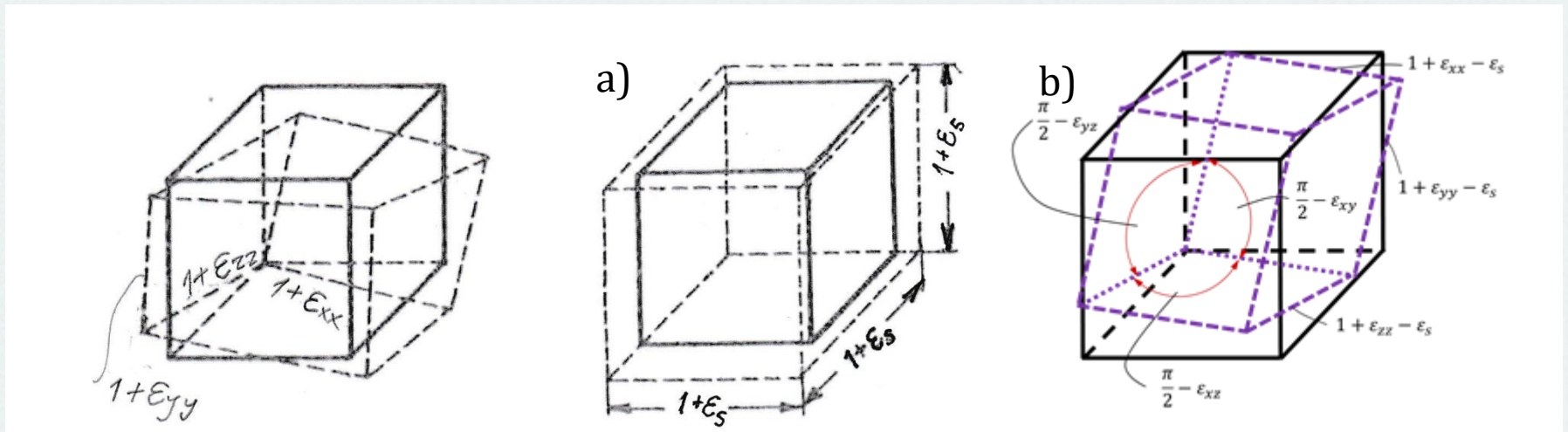
Rozklad přetvoření (deformací) na čistě objemové a tvarové

Pevnost materiálu je závislá nejen na velikosti napětí, ale i na charakteru napjatosti.

Tělesa odolávají velmi dobře všestrannému tlaku (ocel), naopak někdy se poruší i při nevelkých zatíženích (cihelný střep).

V souvislosti s tím se ukazuje vhodným oddělit od celkové deformace tělesa složky spojené se změnou objemu a zvlášť vyšetřovati složky přetvoření, které se vztahují ke změně tvaru.

Rozlišujeme případ všestranného rovnoměrného tahu (případ „čistě objemového“ nebo „volumetrického“ přetvoření) a „přetvoření tvarové“ (jinak „úhlové“ nebo „deviační“).



Rozklad složitého přetvoření krychle na „čistě objemové“ a „čistě deviační“

a) Mění se pouze objem – tvar se nemění $\vartheta = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}$.

b) Mění se pouze tvar – objem se nemění

$$\vartheta = (\varepsilon_{xx} - \varepsilon_s) + (\varepsilon_{yy} - \varepsilon_s) + (\varepsilon_{zz} - \varepsilon_s) = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} - 3\varepsilon_s = 0.$$

$$\varepsilon_s = \frac{1}{3}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz})$$

$$\mathbf{K}_\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_s & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_s & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_s \end{bmatrix} \quad (12) \quad \textbf{Kulový (volumetrický) tenzor přetvoření (deformací)}$$

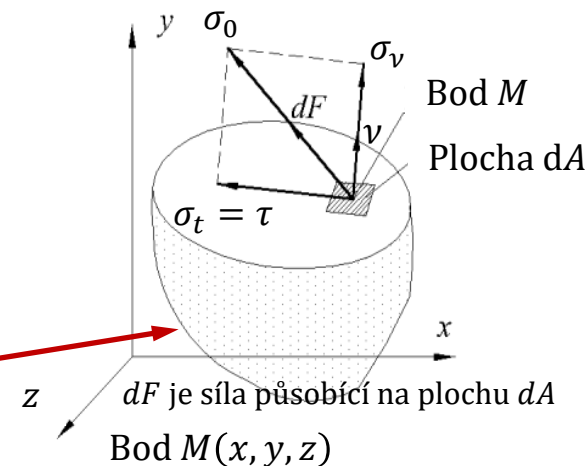
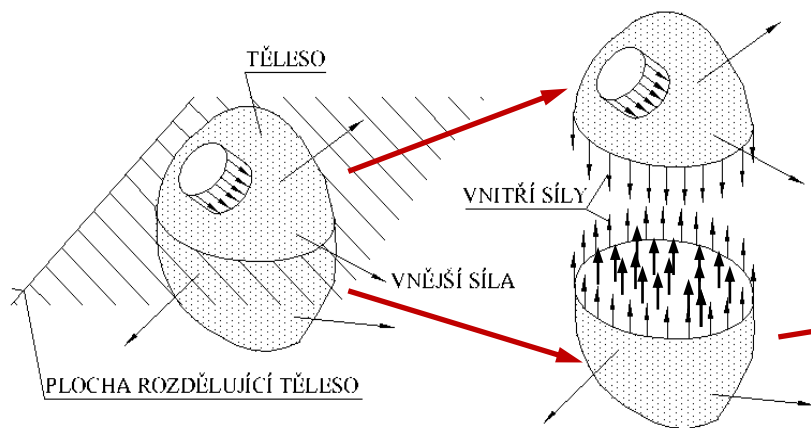
$$\mathbf{D}_\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} - \varepsilon_s & \frac{1}{2}\varepsilon_{xy} & \frac{1}{2}\varepsilon_{xz} \\ \frac{1}{2}\varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} - \varepsilon_s & \frac{1}{2}\varepsilon_{yz} \\ \frac{1}{2}\varepsilon_{zx} & \frac{1}{2}\varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} - \varepsilon_s \end{bmatrix} \quad (13) \quad \textbf{Deviátor přetvoření (deformací)}$$

Je zřejmé, že

$$\mathbf{T}_\varepsilon = \mathbf{K}_\varepsilon + \mathbf{D}_\varepsilon. \quad (14)$$

$$\mathbf{T}_\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2}\varepsilon_{xy} & \frac{1}{2}\varepsilon_{xz} \\ \frac{1}{2}\varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \frac{1}{2}\varepsilon_{yz} \\ \frac{1}{2}\varepsilon_{zx} & \frac{1}{2}\varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

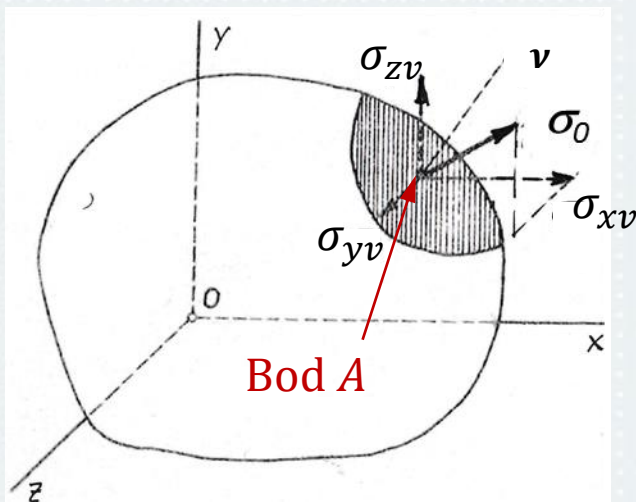
Pole napětí



$$\sigma_0 = \sigma_0(x, y, z)$$

$$\sigma_0 = \frac{dF}{dA} \quad (15)$$

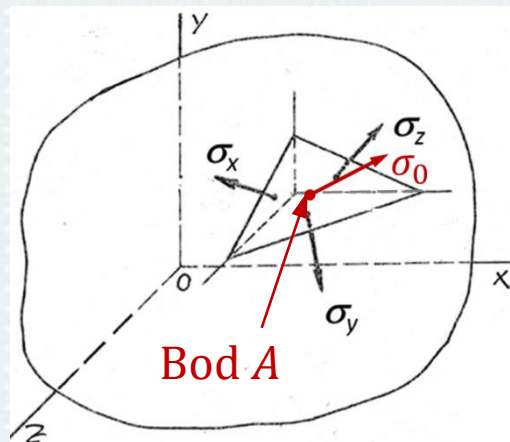
Vektor σ_0 je často rozkládán na σ_v (normálové napětí) – směr shodný s orientací normály $\mathbf{v}$ na ploše dA a na σ_t (tečné napětí) ležící v rovině plochy dA . Napětí σ_0 se nazývá plné napětí.



Bod A

Označení **plného napětí** v bodě plošky s danou normálou

$$\text{Platí } \sigma_0^2 = \sigma_{xv}^2 + \sigma_{yv}^2 + \sigma_{zv}^2 \quad (16)$$



Bod A

Označení **plných napětí** ve všech čtyřech stěnách čtyřstěnu vyříznutého v daném bodě

Složky napětí působící na třech vzájemně kolmých ploškách rovnoběžných s rovinami definovanými systémem souřadnic jsou označeny takto:

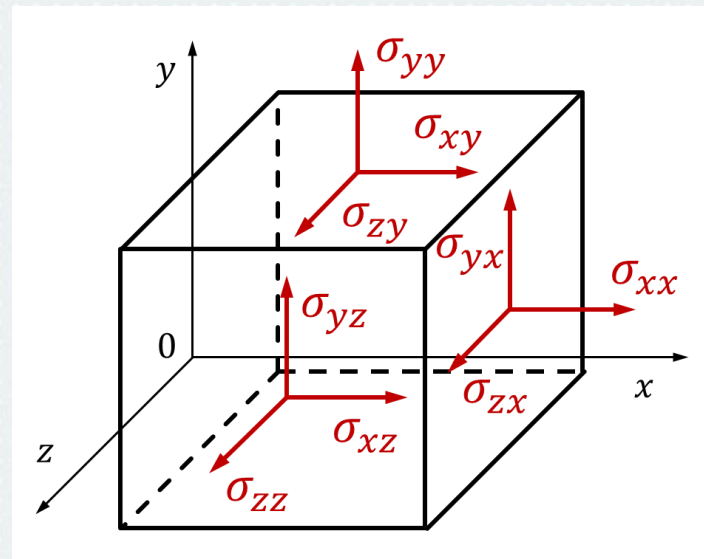
složky σ_x jsou $\sigma_{xx}, \sigma_{yx}, \sigma_{zx}$

složky σ_y jsou $\sigma_{xy}, \sigma_{yy}, \sigma_{zy}$

složky σ_z jsou $\sigma_{xz}, \sigma_{yz}, \sigma_{zz}$

Složky $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$ představují normálové napětí
 Složky $\sigma_{xy}, \sigma_{yz}, \sigma_{zx}$ představují tangenciální napětí

Označení složek napětí na stěnách nekonečně
 malého (infinitezimálního) kváдру
 Zobrazení složek – kladný smysl



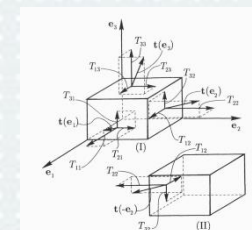
Matice

$$\mathbf{T}_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (17) \quad \text{se v teorii pružnosti nazývá \textbf{tenzorem napětí}} \\ \text{je symetrická} \quad \sigma_{xy} = \sigma_{yx}, \sigma_{yz} = \sigma_{zy}, \sigma_{zx} = \sigma_{xz}.$$

Pod vlivem působení vnějšího zatížení
 vzniká v tělese pole napětí

Stav napětí v bode $A(x, y, z)$ popisuje tenzor napětí pro tento bod

Stav napětí v libovolném bodě $A(x, y, z)$ lze jednoznačně
 popsat pomocí vektoru napětí



$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(x, y, z, t)$$

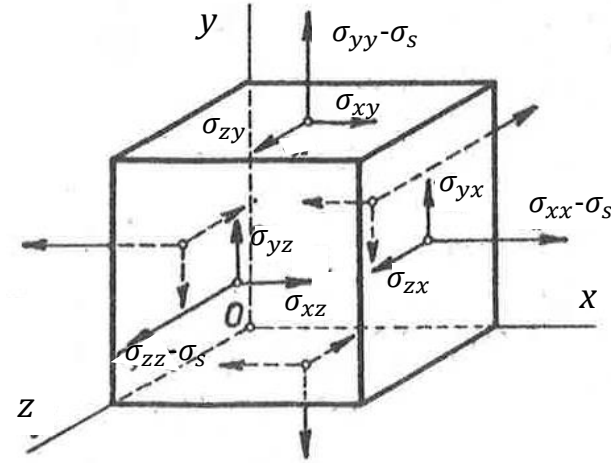
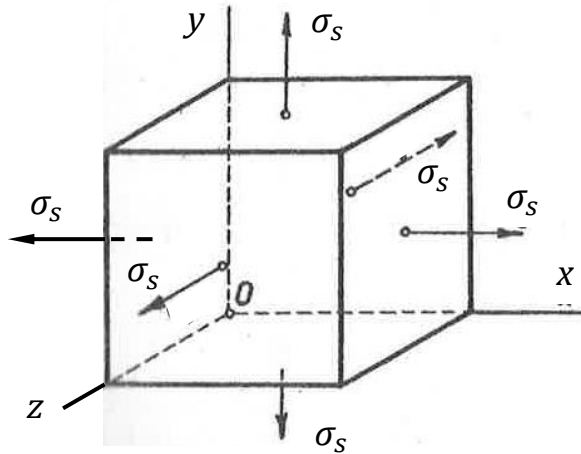
$$\boldsymbol{\sigma} = \left\{ \begin{matrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{matrix} \right\} = \{\sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{zz} \quad \sigma_{xy} \quad \sigma_{yz} \quad \sigma_{zx}\}^T \quad (18) \quad \text{Vektor složek napětí}$$

Analogicky rozkladu plného přetvoření (deformací) elementárního kvádru lze rozložit i složky tenzoru napětí.

Analogicky **střední napětí** $\sigma_s = 1/3(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})$ (19)

Složky vyvolávající změnu objemu

Složky podmiňující změnu tvaru



$$\mathbf{K}_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_s & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_s & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_s \end{bmatrix} \quad (20)$$

Kulový (volumetrický) tenzor napětí

$$\mathbf{D}_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} - \sigma_s & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} - \sigma_s & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} - \sigma_s \end{bmatrix} \quad (21)$$

Deviátor napětí

Složením výše uvedených vztahů

$$\mathbf{T}_\sigma = \mathbf{K}_\sigma + \mathbf{D}_\sigma. \quad (22)$$

Formulace je neobyčejně obecná ve srovnání s naukou o pružnosti a pevnosti

Vyšetřuje se libovolné těleso – **těleso trojrozměrné**

Těleso je obvykle zadáno rovnicí plochy $\Phi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = 0$

Na těleso působí vnější síly a vnitřní síly. Těleso je podepřeno – spojeno s jinými tělesy.

Síly mohou být statické i dynamické.

Při řešení úloh lze použít i jiné systémy souřadnic než pravoúhlé.

(válcové, kulové, polární atd.)

Hledanými veličinami jsou převážně složky posunutí a napětí.

Někdy také složky deformací.

$u_x = f_1(x, y, z, t), \quad u_y = f_2(x, y, z, t), \quad u_z = f_3(x, y, z, t)$	}	Pole posunutí 3 funkce
$\varepsilon_{xx} = f_4(x, y, z, t), \quad \varepsilon_{yy} = f_5(x, y, z, t), \quad \varepsilon_{zz} = f_6(x, y, z, t)$		
$\varepsilon_{xy} = f_7(x, y, z, t), \quad \varepsilon_{yz} = f_8(x, y, z, t), \quad \varepsilon_{xz} = f_9(x, y, z, t)$		
$\sigma_{xx} = f_{10}(x, y, z, t), \quad \sigma_{yy} = f_{11}(x, y, z, t), \quad \sigma_{zz} = f_{12}(x, y, z, t)$	}	Pole přetvoření 6 funkcí (deformací)
$\sigma_{xy} = f_{13}(x, y, z, t), \quad \sigma_{yz} = f_{14}(x, y, z, t), \quad \sigma_{xz} = f_{15}(x, y, z, t)$		
	}	Pole napětí 6 funkcí

Celkem 15 funkcí pro popis chování tělesa.

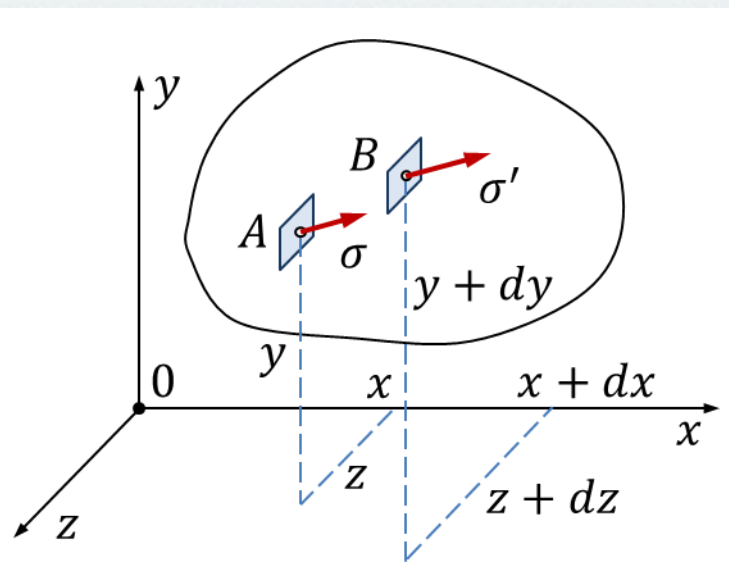
Pro analytické řešení statického a dynamického chování (tj. určení posunutí, deformací a napětí) při působení zadaného vnějšího zatížení a teploty je nutno definovat **základní rovnice teorie pružnosti** **vyhovující okrajovým podmínkám** (předepsané silové působení nebo předepsané posunutí).

Základní rovnice v teorii lineární pružnosti

1. Statické podmínky rovnováhy
2. Vztahy mezi deformacemi a posunutími
3. Vztahy mezi napětími a deformacemi
4. Doplnkové rovnice – rovnice kompatibility

Je nutno definovat 15 rovnic

Teorie napjatosti (statické rovnice)



Napětí σ lze rozložit na složky podle směrů souřadnic

σ_{xx} , σ_{yx} a σ_{zx}

Zvolíme nekonečně blízko k bodu A bod B .

V bodě B se složky napětí liší od složek v bodě A . Toto platí za předpokladu, že napětí jsou spojitými funkcemi. Roviny ploch jsou kolmé na osu x . Složky napětí v bodě B lze vyjádřit s postačující přesností pomocí složek napětí v bodě A .

$$\sigma'_{xx} = \sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial y} dy + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial z} dz$$

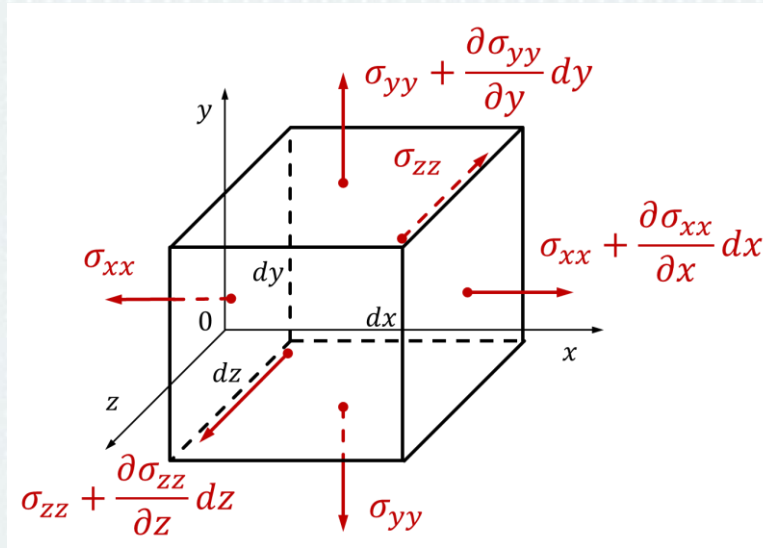
$$\sigma'_{yx} = \sigma_{yx} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} dx + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} dy + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial z} dz$$

$$\sigma'_{zx} = \sigma_{zx} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} dx + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial y} dy + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} dz$$

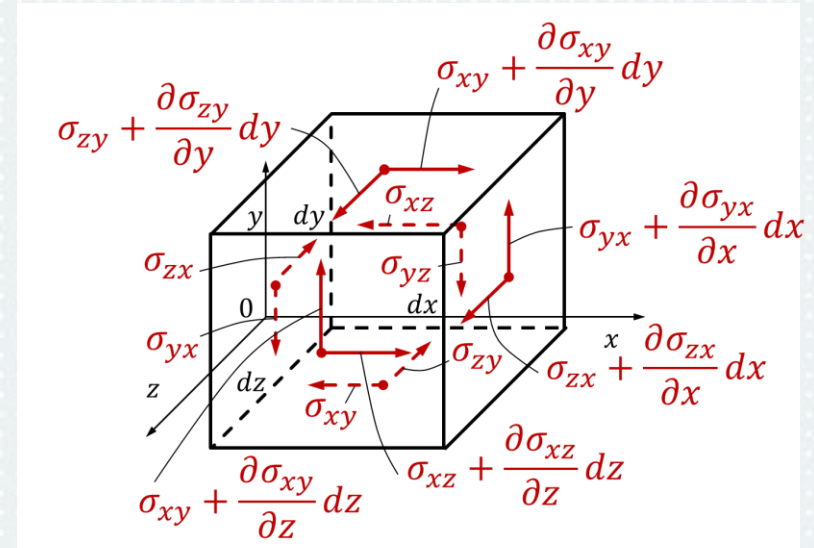
Leží-li oba vyšetřované body na přímce rovnoběžné s některou z os souřadnic vztahy se zjednoduší. Např. přímky AB je rovnoběžná s osou x , potom

$$\sigma'_{xx} = \sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx, \quad \sigma'_{yx} = \sigma_{yx} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} dx, \quad \sigma'_{zx} = \sigma_{zx} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} dx.$$

Přírůstek funkce $\partial \sigma_{xx}$ na délce dx je zapsán $\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx$, atd.



Označení normálových napětí na všech stěnách elementárního kvádru



Označení tangenciálních napětí na všech stěnách elementárního kvádru

Diferenciální rovnice rovnováhy a pohybu

Předpokládá se, že těleso (nekonečně malý kvádr) v prostoru je v rovnováze.

Musí být splněno šest rovnic (silové a momentové podmínky rovnováhy)

$$\sum X = 0, \quad \sum Y = 0, \quad \sum Z = 0 \quad \text{a} \quad \sum M_x = 0, \quad \sum M_y = 0, \quad \sum M_z = 0. \quad (23)$$

Je-li těleso v pohybu pak pravé strany rovnic nejsou nulové. Posunutí u_x , u_y a u_z jsou velmi malá, potom průměty zrychlení

$$a_x = \ddot{u}_x = \frac{d^2 u_x}{dt^2}, \quad a_y = \ddot{u}_y = \frac{d^2 u_y}{dt^2}, \quad a_z = \ddot{u}_z = \frac{d^2 u_z}{dt^2}, \quad (24)$$

Např. pohybová rovnice pro směr x

2. Newtonův zákon

$$\sum X = m \frac{d^2 u_x}{dt^2}. \quad (25)$$

Po rozepsání rovnice přechází na tvar

$$\left[\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx \right] dydz - \sigma_{xx} dydz + \left[\sigma_{xy} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} dy \right] dx dz - \sigma_{xy} dx dz + \left[\sigma_{xz} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} dz \right] dy dx - \sigma_{xz} dy dx + X dx dy dz = \rho dx dy dz \frac{d^2 u_x}{dt^2}$$

X je objemová síla ve směru osy x
 ρ je specifická hmotnost

Po úpravách a pro další dva směry získáme **rovnice rovnováhy (statika)**

Dynamika - pohybové rovnice

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + X &= \rho \frac{d^2 u_x}{dt^2} \\ \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + Y &= \rho \frac{d^2 u_y}{dt^2} \\ \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + Z &= \rho \frac{d^2 u_z}{dt^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + X &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + Y &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + Z &= 0 \end{aligned} \quad (26)$$

Momentové podmínky rovnováhy

Např. $\sum M_{z_0} = 0$, v dynamice $\sum M_{z_0} = J \frac{d^2 \omega'_z}{dt^2}$

$$- \left[\sigma_{xy} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} dy \right] dx dz \frac{dy}{2} - \sigma_{xy} dx dz \frac{dy}{2} +$$

$$+ \left[\sigma_{yx} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} dx \right] dy dz \frac{dx}{2} + \sigma_{yx} dy dz \frac{dx}{2} = 0 \text{ nebo } J \frac{d^2 \omega'_z}{dt^2}$$

Veličiny nekonečně malé čtvrtého a pátého řádu se zanedbají. Zůstanou pouze členy nekonečně malé třetího řádu $\sigma_{xy} dx dz dy$, $\sigma_{yx} dx dz dy$. $\Rightarrow \sigma_{xy} = \sigma_{yx}$

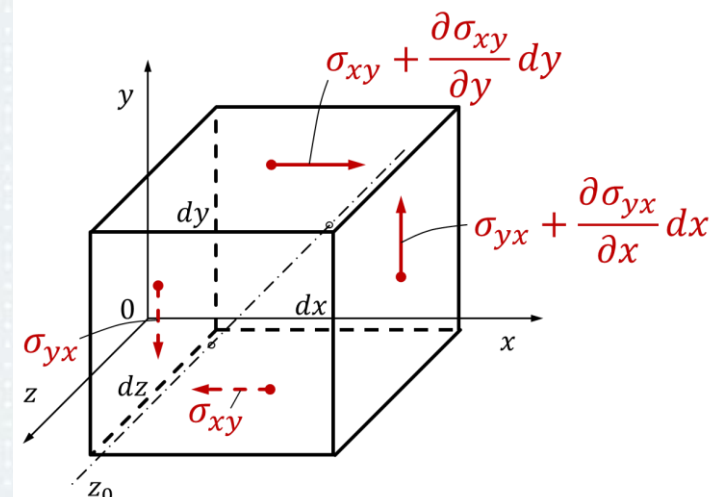
Jedná se o **zákon o sdružených tangenciálních napětích**

Tedy $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}, \quad \sigma_{zx} = \sigma_{xz}, \quad \sigma_{yz} = \sigma_{zy}.$

V každých dvou vzájemně kolmých rovinách se složky tangenciálních napětí, kolmé k průsečnici těchto rovin, sobě rovnají a směřují při tom buď obě k průsečnici nebo obě od ní.

Počet neznámých funkcí napětí je tedy pouze šest.

Při řešení je nutno provést integraci diferenciálních rovnic s cílem získat obecný tvar hledaných funkcí. Je třeba určit integrační konstanty v závislosti na okrajových podmínkách.

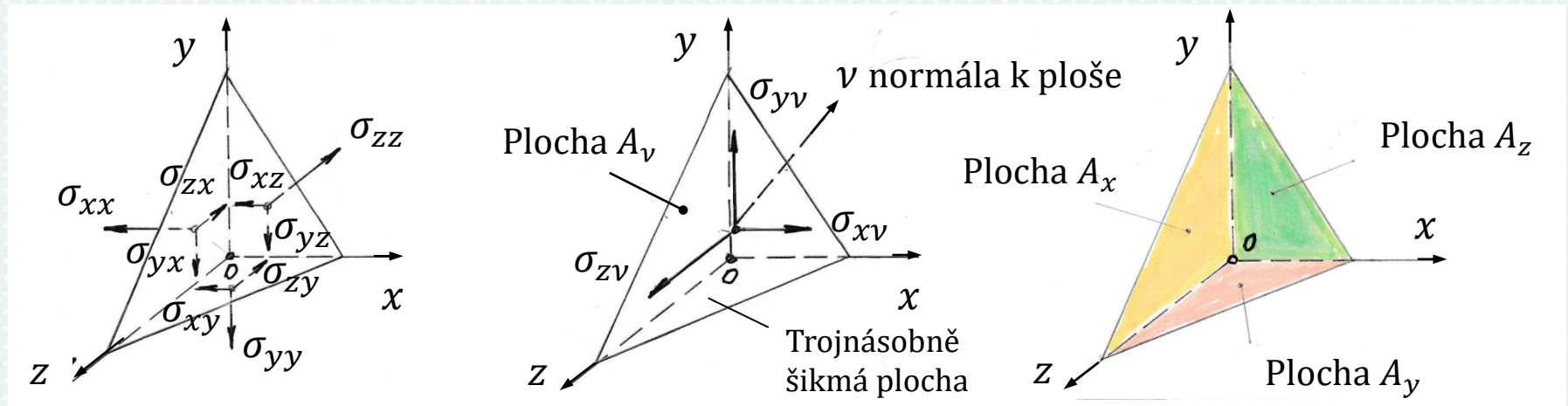


$\frac{d^2 \omega'_z}{dt^2}$ úhlové zrychlení

J hmotný moment setrvačnosti

Okrajové podmínky

Potřeba stanovit vztahy mezi vnějšími (povrchovými) silami a vnitřními silami.



Podmínka rovnováhy průmětů do osy x $\sigma_{xv}A_v - \sigma_{xx}A_x - \sigma_{xy}A_y - \sigma_{xz}A_z = 0$

Poměr plochy kterékoliv ze tří kolmých stěn k ploše šikmé stěny je dán kosinem úhlu,

který spolu svírají $\frac{A_x}{A_v} = \cos(x, v)$, $\frac{A_y}{A_v} = \cos(y, v)$ a $\frac{A_z}{A_v} = \cos(z, v)$.

$$\sigma_{xv} = \sigma_{xx} \cos(x, v) + \sigma_{xy} \cos(y, v) + \sigma_{xz} \cos(z, v)$$

Zavedme označení $\cos(x, v) = l$, $\cos(y, v) = m$, $\cos(z, v) = n$. (27)

Totéž pro směry y a z . Takto získáme tři podmínky na povrchu (silové okrajové podmínky)

$$\sigma_{xv} = \sigma_{xx}l + \sigma_{xy}m + \sigma_{xz}n$$

$$\sigma_{yv} = \sigma_{yx}l + \sigma_{yy}m + \sigma_{yz}n$$

$$\sigma_{zv} = \sigma_{zx}l + \sigma_{zy}m + \sigma_{zz}n$$

(28)

Vyšetřování stavu napětí v daném bodě tělesa. Hlavní napětí.

Plné napětí na vyšetřované plošce

$$\sigma_0^2 = \sigma_{xv}^2 + \sigma_{yv}^2 + \sigma_{zv}^2 \quad (29)$$

Složky $\sigma_{xv}, \sigma_{yv}, \sigma_{zv}$ obecně vzato nejsou ani normálové ani tangenciální napětí, a proto nejsou pro posouzení pevnosti vhodné.

Promítneme-li složky $\sigma_{xv}, \sigma_{yv}, \sigma_{zv}$ do směru normály v dostaneme normálové napětí na šikmé plošce

$$\sigma_v = \sigma_{xv} \overset{l}{\cos(x, v)} + \sigma_{yv} \overset{m}{\cos(y, v)} + \sigma_{zv} \overset{n}{\cos(z, v)}.$$

Po zohlednění podmínek rovnováhy (28) na plošce (jako na povrchu) a rovnic (27)

$$\sigma_v = \sigma_{xx}l^2 + \sigma_{yy}m^2 + \sigma_{zz}n^2 + 2\sigma_{xy}lm + 2\sigma_{yz}mn + 2\sigma_{zx}nl. \quad (30)$$

Tangenciální napětí na téže plošce se určí z rovnice

$$\sigma_0^2 = \sigma_v^2 + \tau^2. \quad (31)$$

V případě, že platí na této plošce $\tau = 0$, potom $\sigma_v^2 = \sigma_0^2$. Tato ploška se nazývá **hlavní**.

Z uvedené podmínky lze určit hlavní napětí i polohu plošek na nichž hlavní napětí působí.

Označíme-li prozatím hlavní napětí σ a promítneme-li toto napětí do os x, y, z potom

$$\begin{aligned}\sigma \cos(v, x) &= \sigma l = \sigma_{xv}, \\ \sigma \cos(v, y) &= \sigma m = \sigma_{yv}, \\ \sigma \cos(v, z) &= \sigma n = \sigma_{zv}.\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\sigma_{xv} &= \sigma_{xx}l + \sigma_{xy}m + \sigma_{xz}n \\ \sigma_{yv} &= \sigma_{yx}l + \sigma_{yy}m + \sigma_{yz}n \\ \sigma_{zv} &= \sigma_{zx}l + \sigma_{zy}m + \sigma_{zz}n\end{aligned}$$



Po dosazení za σ_{xv} , σ_{xv} , σ_{xv} , viz uvedené rovnice (28), a po aplikaci rovnic (28) obdržíme

$$\begin{aligned}\sigma l &= \sigma_{xx}l + \sigma_{xy}m + \sigma_{xz}n, \\ \sigma m &= \sigma_{yx}l + \sigma_{yy}m + \sigma_{yz}n, \\ \sigma n &= \sigma_{zx}l + \sigma_{zy}m + \sigma_{zz}n.\end{aligned}$$

Krom toho platí $l^2 + m^2 + n^2 = 1.$ (32)

Poslední čtyři rovnice obsahují čtyři neznámé (hlavní napětí a jeho tři směrové kosiny).

První tři rovnice lze přepsat takto:

$$\begin{aligned}(\sigma_{xx} - \sigma)l + \sigma_{xy}m + \sigma_{xz}n &= 0 \\ \sigma_{yx}l + (\sigma_{yy} - \sigma)m + \sigma_{yz}n &= 0 \\ \sigma_{zx}l + \sigma_{zy}m + (\sigma_{zz} - \sigma)n &= 0\end{aligned} \quad \text{nebo} \quad \begin{bmatrix} \sigma_{xx} - \sigma & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} - \sigma & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} - \sigma \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l \\ m \\ n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (33)$$

Homogenní rovnice mají řešení, když determinant soustavy rovnic se rovná nule

$$\begin{vmatrix} \sigma_{xx} - \sigma & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} - \sigma & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} - \sigma \end{vmatrix} = 0 \quad (34)$$

Po rozvinutí determinantu získáme polynom 3. stupně, kubickou rovnici s kořeny

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$

$$\begin{aligned}\sigma^3 + \sigma^2(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) + \sigma(\sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{yy}\sigma_{zz} + \sigma_{zz}\sigma_{xx} - \sigma_{xy}^2 - \sigma_{yz}^2 - \sigma_{zx}^2) - \\ - (\sigma_{xx}\sigma_{yy}\sigma_{zz} + 2\sigma_{xy}\sigma_{yz}\sigma_{zx} - \sigma_{xx}\sigma_{yz}^2 - \sigma_{yy}\sigma_{zx}^2 - \sigma_{zz}\sigma_{xy}^2) = 0\end{aligned}$$

Uspořádáme kořeny – **hodnoty hlavních napětí**

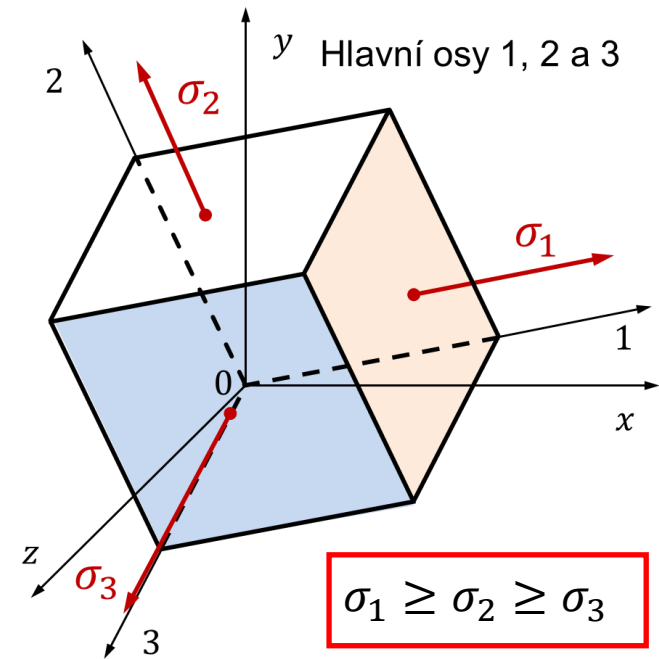
$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \quad (35)$$

Existují **tři plochy** dA (vzájemně mezi sebou kolmé), pro které napětí σ v libovolném bodě $A(x, y, z)$ dosahuje hodnot a $\tau = 0$:

σ_{max} a σ_{min}

Směry normál na těchto třech plochách definují hlavní osy napětí v daném bodě. V hlavních osách jsou tečná napětí rovna nule.

Máme-li vypočteny hodnoty $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ lze dopočítat pomocí uvedených rovnic směry hlavních os. Pro σ_1 hodnoty l_1, m_1, n_1 a pro σ_2 hodnoty l_2, m_2, n_2 . A nakonec pro σ_3 hodnoty l_3, m_3, n_3 .



Máme-li tenzor napětí $\mathbf{T}_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$ v bodě A elementárního hranolu

v lokálních osách x, y a z , potom tenzor napětí $\mathbf{T}'_\sigma$ v lokálních osách x', y' a z' téhož hranolu lze vyčíslit ze vztahu

$$\mathbf{T}'_\sigma = \mathbf{L} \mathbf{T}_\sigma \mathbf{L}^T, \quad (36)$$

kde $\mathbf{L}$ je transformační matice čárkovaných os.

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} l_x & m_x & n_x \\ l_y & m_y & n_y \\ l_z & m_z & n_z \end{bmatrix}$$

obsahující směrové kosiny

Invarianty tenzoru napětí

Hlavní napětí v daném bodě existují a jsou nezávislé na způsobu jejich výpočtu, to znamená **jsou invariantní k transformaci systému souřadnic**.

Kořeny kubické rovnice jsou nezávislé na volbě systému souřadnic – koeficienty jsou invarianty transformace souřadnic

$$\sigma^3 - \sigma^2 \sigma^I + \sigma \sigma^{II} - \sigma^{III} = 0 \quad (37)$$

kde σ^I , σ^{II} , σ^{III} jsou invariantní vztahy – **první, druhý a třetí invariant tenzoru napětí**.

Tedy

$$\sigma^I = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} = \text{konst. } k^I \quad (38a)$$

$$\sigma^{II} = \sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{yy}\sigma_{zz} + \sigma_{zz}\sigma_{xx} - \sigma_{xy}^2 - \sigma_{yz}^2 - \sigma_{zx}^2 = \text{konst. } k^{II} \quad (38b)$$

$$\sigma^{III} = \sigma_{xx}\sigma_{yy}\sigma_{zz} + 2\sigma_{xy}\sigma_{yz}\sigma_{xz} - \sigma_{xx}\sigma_{yz}^2 - \sigma_{yy}\sigma_{zx}^2 - \sigma_{zz}\sigma_{xy}^2 = \text{konst. } k^{III} \quad (38c)$$

Pro kontrolu výpočtu hlavních napětí lze použít vztah (stopa matice – tenzoru)

$$\sigma^I = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

Třetí invariant (kubický) je vlastně rozvinutý determinant

$$\sigma^{III} = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{vmatrix}$$

Pro kontrolu výpočtu lze také použít

$$\sigma^I = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{vmatrix} = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$$

Druhý invariant (kvadratický) představuje součet minorů determinantu

$$\sigma^{II} = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{vmatrix}$$

Kontrolu správnosti lze i provést pomocí vztahu

$$\sigma^{II} = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_2 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_1 \end{vmatrix} = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1$$

V teorii napětí, jakož i v teorii přetvoření (deformací) je invarianty třeba považovat za základní charakteristiky stavu napětí a stavu přetvoření (deformací) v bodě.

Invarianty tenzoru napětí σ^I, σ^I a σ^I se také označují I_1, I_2 a I_3 .

Pro deviator napětí $\mathbf{D}_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} - \sigma_s & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} - \sigma_s & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} - \sigma_s \end{bmatrix}$ lze určit obdobně invarianty

nazývané invarianty deviatoru napětí J_1, J_2 a J_3

Označme $s_{xx} = \sigma_{xx} - \sigma_s$, $s_{yy} = \sigma_{yy} - \sigma_s$ a $s_{zz} = \sigma_{zz} - \sigma_s$, potom invarianty J_1, J_2 a J_3 jsou definovány takto

$$J_1 = s_{xx} + s_{yy} + s_{zz} = 0$$

$$J_2 = \begin{vmatrix} s_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & s_{yy} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} s_{xx} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{zx} & s_{zz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} s_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zy} & s_{zz} \end{vmatrix}$$

$$J_3 = |\mathbf{D}_\sigma|$$

Zapsáno přes hlavní napětí

$$J_1 = (\sigma_1 - \sigma_s) + (\sigma_2 - \sigma_s) + (\sigma_3 - \sigma_s) = 0$$

Pouze smyk

$$J_2 = \frac{2}{3} (\sigma_{13}^2 + \sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2) = \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]^2$$

Pouze smyk

$$J_3 = (\sigma_1 - \sigma_s)(\sigma_2 - \sigma_s)(\sigma_3 - \sigma_s) = \frac{1}{27} (\sigma_{13} + \sigma_{12})(\sigma_{21} + \sigma_{23})(\sigma_{31} + \sigma_{32})$$

Využití u nelineárních materiálových modelů

Oktaedrické napětí

Napětí na ploškách stejně nakloněných ke hlavním rovinám. Tyto plošky nazýváme **oktaedrické**.

Směrové kosiny vůči hlavním osám

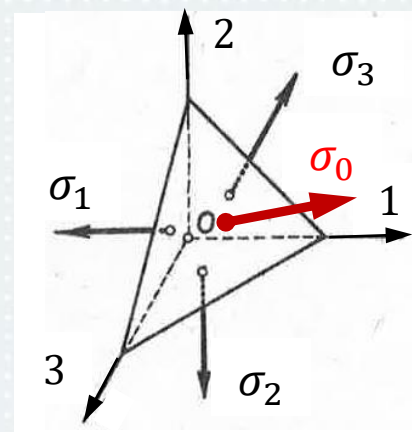
$$l = m = n = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

V souladu s vzorci (28) a (29) $\sigma_{1v} = \sigma_1 l$, $\sigma_{2v} = \sigma_2 m$, $\sigma_{3v} = \sigma_3 n$.

Pro plné napětí na oktaedrické plošce máme rovnici

$$\sigma_0^2 = \frac{1}{3} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2). \quad (39)$$

Čtverec (druhá mocnina) plného napětí na oktaedrické plošce se rovná se aritmetickému průměru čtverců hlavních napětí.



Oktaedrická ploška

Podle vzorce (30) $(\sigma_v = \sigma_{xx}l^2 + \sigma_{yy}m^2 + \sigma_{zz}n^2 + \underbrace{2\sigma_{xy}lm + 2\sigma_{yz}mn + 2\sigma_{zx}nl})$

$$\sigma_{okt} = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad \text{neboli} \quad \sigma_{okt} = \sigma_s. \quad (40) \quad 0 \quad \text{Pro oktaedrické plošky} \\ l = m = n = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Normálové napětí na oktaedrické plošce σ_{okt} se rovná střednímu normálovému napětí v daném bodě.

Pro tangenciální napětí na oktaedrické plošce platí $\tau_{okt}^2 = \sigma_0^2 - \sigma_{okt}^2$.

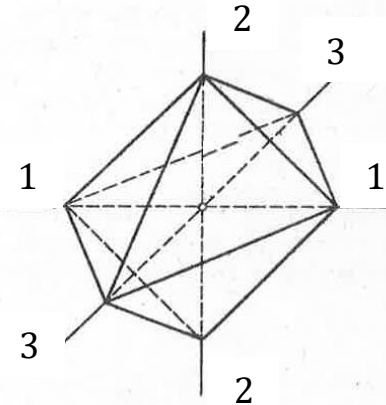
Potom $\tau_{okt}^2 = \frac{1}{3}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{1}{9}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2$.

Po odstranění závorek $\tau_{okt}^2 = \frac{2}{9}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1)$.

Odtud $\tau_{okt} = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}. \quad (41)$

Označíme-li $\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \tau_{12}, \quad \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} = \tau_{23}, \quad \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} = \tau_{31}$ potom

$\tau_{okt} = \frac{2}{3}\sqrt{\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2 + \tau_{31}^2}, \quad (42) \quad \text{kde } \tau_{ij} \text{ jsou } \textbf{hlavní tangenciální napětí}.$



Na všech osmi stěnách Osmistěnu působí stejná normálová a tangenciální napětí

V teorii plasticity má oktaedrické tangenciální napětí základní význam, neboť určuje charakter průběhu plastických deformací.

Zápis pomocí invariantů napětí $\tau_{okt}^2 = \frac{2}{9}[(\sigma^I)^2 - 3\sigma^{II}]$.

Nakonec zápis pomocí složek napětí

$$\tau_{okt} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2)}.$$

Při posuzování konstrukcí se často používá **srovnávací (ekvivalentní) napětí**

$$\sigma_{HMH} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}.$$

Huber, Mises, Hencky
(43)

Oktaedrické tangenciální napětí je přímo úměrné srovnávacímu napětí $\tau_{okt} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_{HMH}$.

Extrémní tangenciální napětí

Obdobně jako u normálového napětí nás zajímá jak stanovit extrémní tangenciální napětí.

Zvolme směry hlavních napětí σ_1, σ_2 a σ_3 za směry souřadnicových os x, y a z . Potom normálové a tangenciální napětí na libovolné „šikmé“ (odkloněné) plošce se dají zapsat

$$\sigma_v = \sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2,$$

$$\tau^2 = \sigma_0^2 - \sigma_v^2 = \sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2 - (\sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2)^2.$$

$$\sigma_0^2 = \sigma_{xv}^2 + \sigma_{yv}^2 + \sigma_{zv}^2$$

$$\sigma l = \sigma_{xv}, \sigma m = \sigma_{yv}, \sigma n = \sigma_{zv}$$

Z rovnice $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ vyloučíme jeden z kosinů, například $n^2 = 1 - l^2 - m^2$, dosadíme do vztahu pro τ a vypočteme její derivace podle l a m , a položíme je rovny nule, potom

$$l \left[(\sigma_1 - \sigma_3) l^2 + (\sigma_2 - \sigma_3) m^2 + \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_3) \right] = 0,$$

$$m \left[(\sigma_1 - \sigma_3) l^2 + (\sigma_2 - \sigma_3) m^2 + \frac{1}{2} (\sigma_2 - \sigma_3) \right] = 0.$$

Rovnice potřebujeme pro nalezení plošek, na kterých napětí τ je maximální, případně minimální.

l	0	0	± 1	0	$\pm \sqrt{\frac{1}{2}}$	$\pm \sqrt{\frac{1}{2}}$
m	0	± 1	0	$\pm \sqrt{\frac{1}{2}}$	0	$\pm \sqrt{\frac{1}{2}}$
n	± 1	0	0	$\pm \sqrt{\frac{1}{2}}$	$\pm \sqrt{\frac{1}{2}}$	0


 Tabulka šesti hodnot kosinů úhlu, při nichž napětí τ nabývá maximální nebo minimální hodnoty

První tři sloupce určují plošky, na kterých τ je rovno nule (minimum). Poslední tři sloupce určují polohu plošek procházející vždy jednou ze tří hlavních os a půlí úhel mezi druhými dvěma.

Hlavní tangenciální napětí

$$\tau_{12} = \pm \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2), \quad \tau_{23} = \pm \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3), \quad \tau_{31} = \pm \frac{1}{2}(\sigma_3 - \sigma_1).$$
(44)

Je dokázáno, že největší tangenciální napětí působí na plošce, která půlí úhel mezi největším a nejmenším hlavním napětím, a že je rovno polovičnímu rozdílu obou těchto napětí.

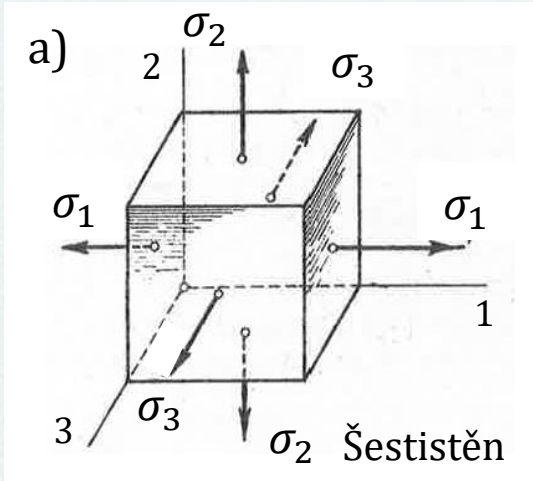
Na těchto ploškách současně působí normálová napětí, která se rovnají polovičním součtům příslušných hlavních napětí

$$\frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2), \quad \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3), \quad \frac{1}{2}(\sigma_3 + \sigma_1).$$
(45)

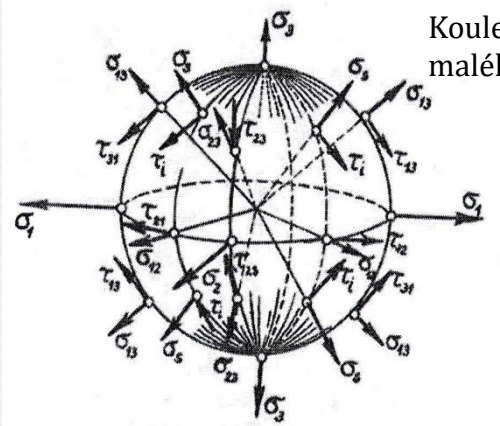
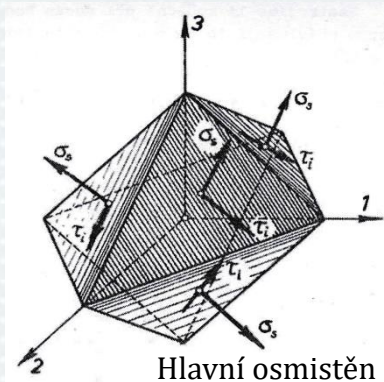
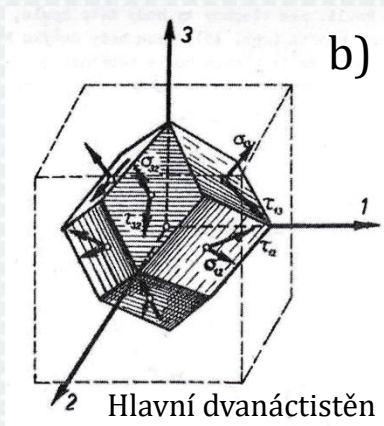
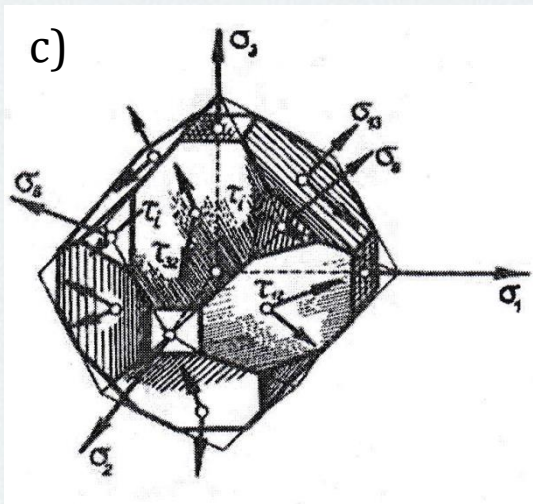
Vyhovují-li hodnoty hlavních napětí nerovnostem, je největší tangenciální napětí rovno $\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)$.

Shrnutí poznatků z teorie napětí

Zobrazení hlavních napětí na ploškách označených 1, 2 a 3. Obr. a)



Hlavní plošky pro normálové napětí. Třem párům plošek, které pólí úhly sevřené vždy dvěma ploškami hlavními přísluší význačné hodnoty tangenciálních napětí. Tyto páry označme 4 a 5, 6 a 7, 8 a 9 a nazveme hlavními ploškami pro tangenciální napětí. Obr. b) Dále lze přidat čtyři roviny odpovídající oktaedrickému napětí, Označené 10, 11, 12 a 13. Obr. c)



Zobrazení 26 významných bodů na kouli

Těleso obsahující všechny významné roviny
Hlavní šestadvacetistěn

Důležitým poznatkem jsou tři invarianty.

I. invariant tenzoru napětí charakterizuje změnu objemu materiálu.

II. invariant deviátoru napětí charakterizuje měřítko tvarové změny při přetvoření a často souvisí s napětím způsobující porušení materiálu.

Geometrická teorie přetvoření (geometrické rovnice)

Posunutí bodu **B** vzhledem k nekonečně blízkému bodu **A**

Posunutí bodu **A**

$$\begin{aligned} u'_x &= u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx + \frac{\partial u_x}{\partial y} dy + \frac{\partial u_x}{\partial z} dz, \\ u'_y &= u_y + \frac{\partial u_y}{\partial x} dx + \frac{\partial u_y}{\partial y} dy + \frac{\partial u_y}{\partial z} dz, \\ u'_z &= u_z + \frac{\partial u_z}{\partial x} dx + \frac{\partial u_z}{\partial y} dy + \frac{\partial u_z}{\partial z} dz. \end{aligned} \quad (46)$$

- přírůstky posunutí u_x z jednotlivých směrů

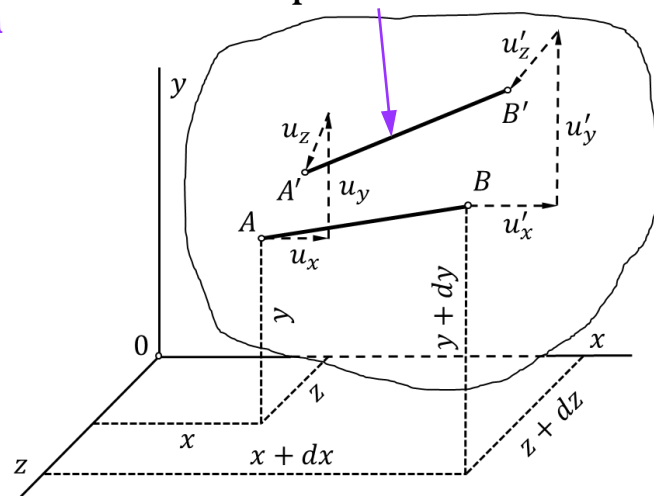
Funkce posunutí jsou funkce spojitě, a po rozložení do Taylorovy řady jsou zanedbány nekonečně malé členy druhého a vyšších řádů.

V případě, že body **A** a **B** přímky např. leží v rovině rovnoběžné s rovinou xOy , a je-li přímka **AB** rovnoběžná s osou x , potom $dy = dz = 0$.

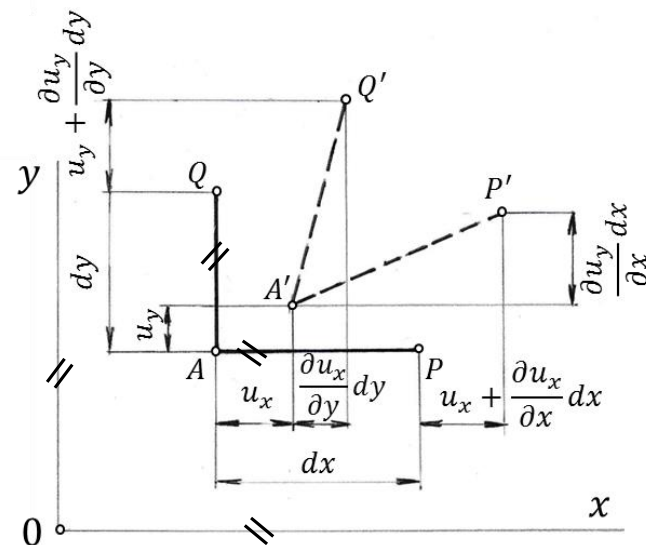
$$u'_x = u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx, \quad u'_y = u_y + \frac{\partial u_y}{\partial x} dx, \quad u'_z = u_z + \frac{\partial u_z}{\partial x} dx. \quad (47)$$

Jako příklad se uvádějí přírůstky složek posunutí pro dva body **P** a **Q** ležící nekonečně blízko bodu **A**. Body leží v rovině xOy viz obr. a jsou částí kváдру. Délky hrany se změní a dochází ke zkosení hran.

Stav po deformaci



Složky posunutí dvou konců nekonečně blízkých bodů spojitěho tělesa



Označení složek posunutí konců úsečky ve zvláštním případě polohy sousedních bodů

Diferenciální závislosti složek přetvoření (deformací) na složkách posunutí (geometrické rovnice)

Nekonečně malý kvádr vyříznutý z tělesa

Souřadnicovými rovinami s hranami dx , dy a dz s bodem A .

Je třeba určit protažení a zkosení kvádru po deformaci.

Podle obrázku poměrné protažení hrany ab

$$\varepsilon_{xx} = \frac{a_1 b_2 - ab}{ab} = \frac{\left(u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx + dx - u_x\right) - dx}{dx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}.$$

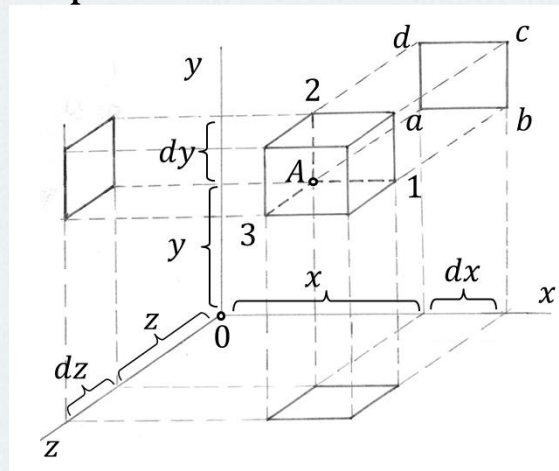
Poměrné protažení ve směru osy $+y$, protažení hrany ad

$$\varepsilon_{yy} = \frac{a_1 d_2 - ad}{ad} = \frac{\left(u_y + \frac{\partial u_y}{\partial y} dy + dy - u_y\right) - dy}{dy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}.$$

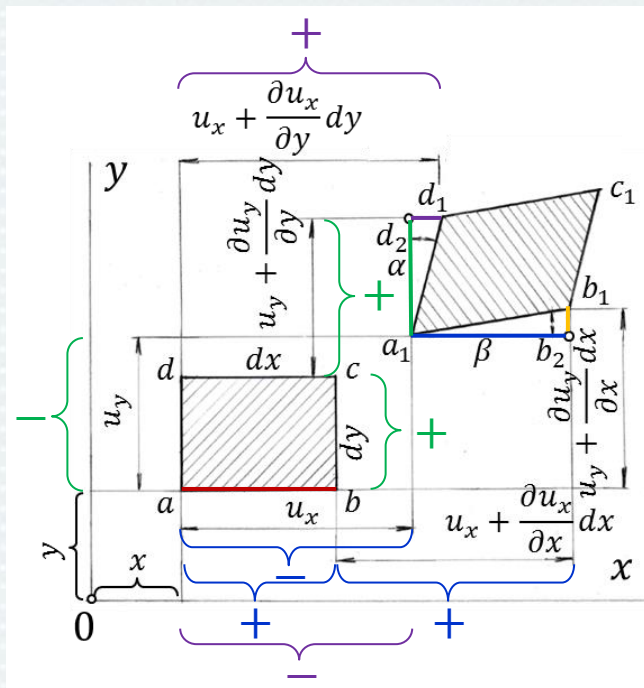
Pro úhel, o nějž se pootočí hrana ad v rovině $x0y$

$$\tan \alpha = \frac{\overline{d_2 d_1}}{\overline{d_2 a_1}} = \frac{u_x + \frac{\partial u_x}{\partial y} dy - u_x}{u_y + \frac{\partial u_y}{\partial y} dy + dy - u_y} = \frac{\frac{\partial u_x}{\partial y}}{1 + \frac{\partial u_y}{\partial y}}.$$

Po zanedbání $\frac{\partial u_y}{\partial y} = \varepsilon_{yy}$ vůči jedničce, $\tan \alpha \approx \alpha = \frac{\partial u_x}{\partial y}.$



Kvádr a jeho průměty před deformací



Jeden z průmětů kvádru před a po deformaci

Pro úhel, o něž se pootočí hrana ab v rovině xOy , $\tan \beta = \frac{\overline{b_2 b_1}}{b_2 a_1}$. Po úpravě $\beta = \frac{\partial u_y}{\partial x}$.

Poměrné posunutí, zkosení pravého úhlu dab $\varepsilon_{xy} = \alpha + \beta = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}$.

Pomocí cyklické záměny získáme další hodnoty.

Maticový zápis lineárních rovnic

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x}, \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial u_y}{\partial y}, \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}, \\ \varepsilon_{yz} &= \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}, \\ \varepsilon_{zx} &= \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}. \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Poměrná} \\ \text{protažení} \\ \\ \text{Zkosení} \end{array} \quad (47)$$

Vztahy mezi deformacemi a posunutími

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix} \quad (48)$$

(48)

Kompaktněji

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\Gamma}_e \mathbf{u}, \quad (49)$$

kde $\boldsymbol{\varepsilon}$ vektor
přetvoření
(deformací),
 $\mathbf{u}$ je vektor posunutí
a $\boldsymbol{\Gamma}_e$ je lineární
operátor

Cauchyho rovnice – 6 rovnic $\boldsymbol{\varepsilon} = f(\mathbf{u})$

Rovnice rovnováhy a geometricko-deformační rovnice jsou základními rovnicemi mechaniky.

Musí se doplnit „podmínky spojitosti přetvoření (kompatibility)“ – vlastnost deformace celistvého spojitého systému.

Podmínky kompatibility – rovnice spojitosti deformace

Podmínky kompatibility vyjadřují skutečnost, že těleso, které je spojitě vyplněno látkou před deformací, zůstane spojitě i po deformaci.

1. skupina rovnic

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 u_x}{\partial x \partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 u_y}{\partial x^2 \partial y}$$

po jejich sečtení

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 u_x}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 u_y}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)$$

ε_{xy}

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y}, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial y \partial z}, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{zx}}{\partial z \partial x}. \end{aligned} \quad (50)$$

2. skupina rovnic

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} &= \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z \partial x} \\ \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} &= \frac{\partial^2 u_x}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} &= \frac{\partial^2 u_y}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y \partial z} \end{aligned}$$

Dále platí $\frac{\partial^3 u_z}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x \partial y}$.

Po dosazení $\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x \partial y}$.

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x \partial y},$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y \partial z},$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z \partial x}. \quad (51)$$

1

2

Lze říci, že jsou-li nějakými rovnicemi dána dvě lineární přetvoření, je tím už také určeno zkosení (např.)

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \iint \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} \right) \partial x \partial y.$$

Dále máme-li závislost podle 2. skupiny rovnic, do kterých vstupují tři úhlová přetvoření ε_{xy} , ε_{yz} a ε_{zx} , potom tyto funkce plně určují protažení např. pro ε_{zz} platí

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{2} \iint \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} \right) \partial x \partial y.$$

Rovnice kompatibility byly odvozeny Saint-Venantem.

Známe-li pro zadané zatížení přesně stanovené pole posunutí, potom pole přetvoření se dá určit z již uvedených rovnic. V tomto případě jsou podmínky kompatibility splněny automaticky.

Budeme-li k danému zatížení hledat napětí a potom přetvoření, bude nutno opět vyhovět podmínkám kompatibility. Jinak by přetvoření nebyla spojitá a nebylo by možné stanovit pole posunutí.

Ve třírozměrném tělese máme 6 nezávislých rovnic kompatibility.

Existuje vztah pro výpočet počtu potřebných rovnic

$$i = \frac{n^2(n^2 - 1)}{12}. \quad (52)$$

$n = 3, i = 6$ – 3D stav napjatosti,

$n = 2, i = 1$ – rovinný stav napětí,

$n = 1, i = 0$ – přímkový stav napětí.

Přetvoření v okolí bodu

Sleduje se protažení v libovolném směru z daného bodu pevného tělesa.

Přímka AB spojuje dva body nekonečně blízko sebe před deformací tělesa.

Přímka $A'B'$ spojuje tytéž body po deformaci. Původní úsečka AB je označena L

$$L^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Směrové úsečky AB (kosíny) před deformací $l = \frac{dx}{L}, \quad m = \frac{dy}{L}, \quad n = \frac{dz}{L}.$

Úsečka $A'B'$ se označí L' potom

$$L'^2 = (dx + u'_x - u_x)^2 + (dy + u'_y - u_y)^2 + (dz + u'_z - u_z)^2.$$

Kromě toho lze vyjádřit tuto délku pomocí původní délky a jejího poměrného protažení $L' = L(1 + \varepsilon)$.

$$L'^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + 2dx(u'_x - u_x) + 2dy(u'_y - u_y) + 2dz(u'_z - u_z) + (u'_x - u_x)^2 + (u'_y - u_y)^2 + (u'_z - u_z)^2.$$

Kromě toho také $L'^2 = L^2(1 + 2\varepsilon + \varepsilon^2).$

Rozdíl čtverců délek (mocniny přírůstků jsou zanedbány)

$$L'^2 - L^2 = 2dx(u'_x - u_x) + 2dy(u'_y - u_y) + 2dz(u'_z - u_z).$$

Také lze zapsat (člen ε^2 byl zanedbán)

$$L'^2 - L^2 = 2L^2\varepsilon.$$

Porovnáním posledních dvou rovnic získáme

$$L^2\varepsilon = dx(u'_x - u_x) + dy(u'_y - u_y) + dz(u'_z - u_z).$$

$$\varepsilon = \frac{dx u'_x - u_x}{L} + \frac{dy u'_y - u_y}{L} + \frac{dz u'_z - u_z}{L}. \quad \text{Po dosazení rovnic (46) a přihlédnutím k } \textcolor{red}{\text{♪}}$$

$$\varepsilon = l \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{dx}{L} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \frac{dy}{L} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \frac{dz}{L} \right) + m \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} \frac{dx}{L} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \frac{dy}{L} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \frac{dz}{L} \right) + n \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \frac{dx}{L} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \frac{dy}{L} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \frac{dz}{L} \right).$$

$$\varepsilon = \frac{\partial u_x}{\partial x} l^2 + \frac{\partial u_y}{\partial y} m^2 + \frac{\partial u_z}{\partial z} n^2 + \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) lm + \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) mn + \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) nl.$$

$$\varepsilon = \varepsilon_{xx} l^2 + \varepsilon_{yy} m^2 + \varepsilon_{zz} n^2 + \varepsilon_{xy} lm + \varepsilon_{yz} mn + \varepsilon_{zx} nl \quad (53)$$

Vztah ukazuje, že protažení kterékoliv úsečky procházející daným bodem se dá vyjádřit pomocí šesti složek přetvoření.

Mezi teorií napětí a přetvoření panuje plná analogie. Například opět platí, že v každém bodě tělesa existují tři vzájemně kolmé směry, zvané hlavními osami přetvoření, které mají tu vlastnost, že vlákna ležící v jejich směru vykazují pouze délkové směry, tj. zkosení jsou na hlavních osách rovny nule.

Kubická rovnice pro stanovení hlavních protažení se dá psát analogicky vztahu (37)

$$\varepsilon^3 - \varepsilon^I \varepsilon^2 + \varepsilon^I \varepsilon^{II} - \varepsilon^{III} = 0, \quad (54)$$

kde $\varepsilon^I, \varepsilon^{II}, \varepsilon^{III}$ jsou invarianty tenzoru přetvoření

$$\begin{aligned} \varepsilon^I &= \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}, \\ \varepsilon^{II} &= \varepsilon_{xx} \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{yy} \varepsilon_{zz} + \varepsilon_{zz} \varepsilon_{xx} - \frac{1}{4} (\varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{yz}^2 + \varepsilon_{zx}^2), \\ \varepsilon^{III} &= \varepsilon_{xx} \varepsilon_{yy} \varepsilon_{zz} + \frac{1}{4} \varepsilon_{xy} \varepsilon_{yz} \varepsilon_{zx} - \frac{1}{4} (\varepsilon_{xx} \varepsilon_{yz}^2 - \varepsilon_{yy} \varepsilon_{zx}^2 - \varepsilon_{zz} \varepsilon_{xy}^2). \end{aligned} \quad (55)$$

Hodnoty hlavních
přetvoření (protahnutí)

$$\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3. \quad (56)$$

Obdobně jako dříve u napětí, lze výraz pro protažení ve směru kolmém k oktaedrickým ploškám zapsat ve tvaru

$$\varepsilon_{okt} = \frac{1}{3}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3). \quad (57)$$

Pro zkosení na oktaedrickým ploškách lze analogicky zapsat

$$\gamma_{okt} = \frac{2}{3}\sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}. \quad (58)$$

Nebo též pomocí složek přetvoření

$$\gamma_{okt} = \frac{2}{3}\sqrt{(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})^2 + (\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{zz})^2 + (\varepsilon_{zz} - \varepsilon_{xx})^2 + \frac{3}{2}(\varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{yz}^2 + \varepsilon_{zx}^2)}.$$

Pro největší zkosení máme vztah $\gamma_{max} = \varepsilon_1 - \varepsilon_3$

V teorii plasticity se využívá veličina úměrná oktaedrickému zkosení

$$\varepsilon_i = \frac{3}{2\sqrt{2}(1 + \nu)}\gamma_{okt}.$$

Táto veličina se nazývá intenzita přetvoření

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{2(1 + \nu)}\sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}. \quad (59)$$

Lze ukázat jednoduchou závislost mezi zobecněným napětím a přetvořením

$$\sigma_i = E\varepsilon_i, \quad \text{kde } E \text{ je modul pružnosti.} \quad (60)$$

Souvislost mezi napětími a složkami přetvoření – fyzikální rovnice

Opět pracujeme s částicí tělesa ve tvaru nekonečně malého kvádrů.

Materiál tělesa je izotropní lineárně pružný.

V případě přímkového napětí ve směru x máme-li účinek σ_{xx} platí $\epsilon'_{xx} = \frac{1}{E} \sigma_{xx}$.

V směrech kolmých y a z $\epsilon'_{yy} = \epsilon'_{zz} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{xx}$.

E je modul (Youngův) pružnosti a ν je součinitel příčné kontrakce (Poissonův součinitel) $0 \leq \nu \leq 0,5$.

Obdobně pro účinek σ_{yy} platí $\epsilon''_{yy} = \frac{1}{E} \sigma_{yy}$ a $\epsilon''_{xx} = \epsilon''_{zz} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{yy}$.

Nakonec pro účinek σ_{zz} platí $\epsilon'''_{zz} = \frac{1}{E} \sigma_{zz}$ a $\epsilon'''_{xx} = \epsilon'''_{yy} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{zz}$.

U těchto třech jednotlivých případech nenastává zkosení pravých úhlů.

Při působení tangenciálních napětí $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$ nastane zkosení těch stěn, které jsou rovnoběžné s rovinou xOy . Podle Hookova zákona

$$\epsilon'_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{G}, \quad \epsilon'_{yz} = \epsilon'_{zx} = 0, \quad \text{kde } G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \text{ je modul pružnosti ve smyku.}$$

Dále od působení $\sigma_{yz} = \sigma_{zy}$ $\epsilon''_{yz} = \frac{\sigma_{yz}}{G}$, $\epsilon''_{zx} = \epsilon''_{xy} = 0$,

a od od působení $\sigma_{zx} = \sigma_{xz}$ $\epsilon'''_{zx} = \frac{\sigma_{zx}}{G}$, $\epsilon'''_{xy} = \epsilon'_{yz} = 0$.

Podle principu superpozice – při společném působení všech složek získáme vztah mezi ϵ a σ . (64)

Prostorová úloha – 3D úloha - rovnice se nazývají fyzikální rovnice

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_{xx} + \nu(\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz})], & \sigma_{xy} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \varepsilon_{xy}, \\
 \sigma_{yy} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_{yy} + \nu(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{zz})], & \sigma_{yz} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \varepsilon_{yz}, \\
 \sigma_{zz} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_{zz} + \nu(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy})], & \sigma_{zx} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \varepsilon_{zx}.
 \end{aligned} \tag{61}$$

Zapsáno maticově

$$\sigma = D\varepsilon \quad (62) \text{ vztah mezi polem napětí a polem deformací}$$

$$\varepsilon = D^{-1}\sigma \quad (63) \text{ vztah mezi polem deformací a polem napětí}$$

D je matice pružnostních konstant

$$D = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{Bmatrix} \xleftrightarrow{\text{6 rovnic}} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} \end{Bmatrix}$$

Pro lineárně pružný
izotropní model
materiálu

$$\sigma = f(\varepsilon)$$

Složky tenzoru přetvoření v daném bodě tělesa jsou lineárně závislé na složkách tenzoru napětí, vztahujících se k témuž bodu.

Maticový zápis $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}^{-1}\boldsymbol{\sigma}$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{Bmatrix} \quad (64)$$

Jiné formy zápisu zobecněného zákona pružnosti

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= 2G \left[\varepsilon_{xx} + \frac{3\nu}{1-2\nu} \varepsilon_s \right], & \sigma_{xy} &= G \varepsilon_{xy}, \\ \sigma_{yy} &= 2G \left[\varepsilon_{yy} + \frac{3\nu}{1-2\nu} \varepsilon_s \right], & \sigma_{yz} &= G \varepsilon_{yz}, \\ \sigma_{zz} &= 2G \left[\varepsilon_{zz} + \frac{3\nu}{1-2\nu} \varepsilon_s \right], & \sigma_{yz} &= G \varepsilon_{yz}, \end{aligned} \quad (65)$$

kde $\varepsilon_s = \frac{1}{3}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz})$ je střední přetvoření.

Jiný zápis

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= 2G \varepsilon_{xx} + \lambda \vartheta, & \sigma_{xy} &= G \varepsilon_{xy}, \\ \sigma_{yy} &= 2G \varepsilon_{yy} + \lambda \vartheta, & \sigma_{yz} &= G \varepsilon_{yz}, \\ \sigma_{zz} &= 2G \varepsilon_{zz} + \lambda \vartheta, & \sigma_{yz} &= G \varepsilon_{yz}, \end{aligned} \quad (66)$$

kde $\vartheta = 3\varepsilon_s$ a $\lambda = \frac{2\nu G}{1-2\nu}$.

Z rovnice (65) vyplývají zajímavé vztahy

$$\sigma_{xx} - \sigma_{yy} = 2G(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}), \quad \sigma_{yy} - \sigma_{zz} = 2G(\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{zz}), \quad \sigma_{zz} - \sigma_{xx} = 2G(\varepsilon_{zz} - \varepsilon_{xx}). \quad (67)$$

Dále

$$\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{\sigma_{yy} - \sigma_{zz}} = \frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}{\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{zz}}, \quad \frac{\sigma_{yy} - \sigma_{zz}}{\sigma_{zz} - \sigma_{xx}} = \frac{\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{zz}}{\varepsilon_{zz} - \varepsilon_{xx}}. \quad (68)$$

Z těchto úměr vyplývá geometrická podobnost Mohrovy kružnice přetvoření s kružnicí napětí.

Vztahují-li se výrazy (67) k „hlavní krychli“, potom

$$\sigma_1 - \sigma_2 = 2G(\varepsilon_1 - \varepsilon_2), \quad \sigma_2 - \sigma_3 = 2G(\varepsilon_2 - \varepsilon_3), \quad \sigma_3 - \sigma_1 = 2G(\varepsilon_3 - \varepsilon_1). \quad (69)$$

S uvážením vztahů (44)

$$\sigma_1 - \sigma_2 = 2\tau_{12}, \quad \sigma_2 - \sigma_3 = 2\tau_{23}, \quad \sigma_3 - \sigma_1 = 2\tau_{31}. \quad (70)$$

Obdobně lze zapsat

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \gamma_{12}, \quad \varepsilon_2 - \varepsilon_3 = \gamma_{23}, \quad \varepsilon_3 - \varepsilon_1 = \gamma_{31}. \quad (71)$$

Potom vztahy (69) se dají zapsat takto

$$\tau_{12} = G\gamma_{12}, \quad \tau_{23} = G\gamma_{23}, \quad \tau_{31} = G\gamma_{31}. \quad (72)$$

K uvedeným vztahům lze dospěti přímo, to kdybychom vyšetřovali kvádr na jehož dvou párech rovnoběžných stěn působí tangenciální napětí $\tau_{12} = \tau_{21}$ atd. Po aplikaci Hookova zákona o smyku získáme rovnice (72).

Sestrojíme-li ve zkoumaném bodě krychli, která je vzhledem k hlavním osám orientována tak, že na dvou párech rovnoběžných stěn této krychle působí tangenciální napětí o velikosti oktaedrického tangenciálního napětí τ_{okt} . Má-li τ_{okt} směr rovnoběžný s některou stranou hlavního osmistěnu, lze zapsat

$$\tau_{okt} = G\gamma_{okt}. \quad (73)$$

Na základě vztahů (41) a (58)

$$\tau_{okt} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = G \frac{2}{3} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}$$

Zavedeme označení $\frac{3}{\sqrt{2}}\tau_{okt} = \sigma_i$, $\frac{3}{2\sqrt{2}(1+\nu)}\gamma_{okt} = \varepsilon_i$, (73) přičemž $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$.

První veličinu σ_i nazveme **zobecněným napětím**, druhou ε_i **zobecněným přetvořením**.

Tímto $\sigma_i = E\varepsilon_i$, (74) kde

$$\sigma_i = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2)} \quad (74a)$$

a

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{2(1+\nu)} \sqrt{(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})^2 + (\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{zz})^2 + (\varepsilon_{zz} - \varepsilon_{xx})^2 + \frac{3}{2}(\varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{yz}^2 + \varepsilon_{zx}^2)}. \quad (74b)$$

Další poznámky – **zákon změny objemu** a **zákon změny tvaru**

Po sečtení levé strany tří prvních rovnic (65) (levý sloupec) a porovnáme-li je se součtem pravých stran týchž rovnic vyjde

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \frac{1 - 2\nu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3).$$

Protože $\sigma_s = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$ a $\varepsilon_s = \frac{1}{3}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)$. Potom plyne, že vztah

$$\sigma_s = \frac{E}{1 - 2\nu} \varepsilon_s.$$

(75)

Jinak

$$\sigma_s = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} \vartheta.$$

(76)

$$3\varepsilon_s = \vartheta$$

Střední napětí v bodě je přímo úměrné střednímu přetvoření.

Střední napětí v bodě je přímo úměrné objemovému přetvoření v okolí téhož bodu.

Objemové přetvoření $\vartheta = \frac{3(1 - 2\nu)}{E} \sigma_s.$

Opět vezmeme rovnice (65). Od levé i pravé stany odečteme σ_s . Potom vzhledem

k rovnici (75) $\sigma_{xx} - \sigma_s = 2G \left[\varepsilon_{xx} + \frac{3\nu}{1 - 2\nu} \varepsilon_s \right] - \frac{E}{1 - 2\nu} \varepsilon_s.$ Záměnou $E = 2(1 + \nu)G$

získáme rovnici $\rightarrow$

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} - \sigma_s &= 2G(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_s) & \sigma_{xy} &= 2G \frac{1}{2} \varepsilon_{xy} \\ \sigma_{yy} - \sigma_s &= 2G(\varepsilon_{yy} - \varepsilon_s) & \sigma_{yz} &= 2G \frac{1}{2} \varepsilon_{yz} \\ \sigma_{zz} - \sigma_s &= 2G(\varepsilon_{zz} - \varepsilon_s) & \sigma_{zx} &= 2G \frac{1}{2} \varepsilon_{zx} \end{aligned} \quad (77)$$

Složky napětí a přetvoření odpovídající změně tvaru jsou navzájem úměrné. Prvé rovnají se druhým, násobeným dvojnásobnou hodnotou modulu pružnosti ve smyku.

Soustavu rovnic (77) lze zapsat ve tvaru tabulky

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} - \sigma_s & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \circ & \sigma_{yy} - \sigma_s & \sigma_{yz} \\ \circ & \circ & \sigma_{zz} - \sigma_s \end{bmatrix} = 2G \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} - \varepsilon_s & \frac{1}{2} \varepsilon_{xy} & \frac{1}{2} \varepsilon_{xz} \\ \circ & \varepsilon_{yy} - \varepsilon_s & \frac{1}{2} \varepsilon_{yz} \\ \circ & \circ & \varepsilon_{zz} - \varepsilon_s \end{bmatrix}$$

Levá matice sestavená ze složek napětí mající vliv na změnu tvaru je deviátor napětí, pravá matice pak deviátor přetvoření.

Symbolicky lze pak zapsat zobecněný zákon pružnosti ve tvaru

$D_\sigma = 2GD_\varepsilon$

 (78)

Deviátor napětí je přímo úměrný deviátoru přetvoření – zákon změny tvaru.

Vrátíme-li se k zákonu změny objemu lze zapsat při použití pojmu kulový tenzor

$K_\sigma = E_o K_\varepsilon$

 (79)

Kulový tenzor napětí je úměrný kulovému tenzoru přetvoření.

Koeficient úměrnosti (objemový modul pružnosti) $E_o = \frac{E}{1 - 2\nu}$. (80) $\nu \neq 0,5$

Ze čtyř konstant E, ν, G, E_o jsou nezávislé dvě.

Objemový modul E_o je měřítkem odporu materiálu proti změně objemu, která není provázena změnou tlaku. Modul pružnosti ve smyku je zase měřítkem odporu materiálu proti změně tvaru bez změny objemu.

A. Statické rovnice rovnováhy nebo dynamické rovnice

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + X &= 0 & (\text{nebo } \rho \frac{d^2 u_x}{dt^2}), \\ \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + Y &= 0 & (\text{nebo } \rho \frac{d^2 u_y}{dt^2}), \\ \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + Z &= 0 & (\text{nebo } \rho \frac{d^2 u_z}{dt^2}).\end{aligned}\quad (81)$$

B. Geometrické rovnice

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x}, & \varepsilon_{xy} &= \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}, \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial u_y}{\partial y}, & \varepsilon_{yz} &= \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}, \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z}, & \varepsilon_{zx} &= \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}.\end{aligned}\quad (82)$$

C. Fyzikální rovnice

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= 2G\varepsilon_{xx} + \lambda\vartheta, & \sigma_{xy} &= G\varepsilon_{xy}, \\ \sigma_{yy} &= 2G\varepsilon_{yy} + \lambda\vartheta, & \sigma_{yz} &= G\varepsilon_{yz}, \\ \sigma_{zz} &= 2G\varepsilon_{zz} + \lambda\vartheta, & \sigma_{yz} &= G\varepsilon_{yz},\end{aligned}\quad (83)$$

kde $\vartheta = 3\varepsilon_s$ a $\lambda = \frac{2\nu G}{1 - 2\nu}$.

V těchto 15 rovnicích

jsou neznámé:

$$u_x, u_y, u_z,$$

- tři složky posunutí

$$\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{yz}, \varepsilon_{zx}$$

- šest složek deformací (přetvoření)

$$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{yz}, \sigma_{zx}$$

- šest složek napětí

Celkem 15 neznámých

Z matematického hlediska lze tuto úlohu řešit.

Je třeba určit 15 funkcí vyhovujících 15 rovnicím (81), (82), (83), jakož i **okrajovým podmínkám**

$$\sigma_{x\nu} = \sigma_{xx} \cos(x, \nu) + \sigma_{xy} \cos(y, \nu) + \sigma_{xz} \cos(z, \nu)$$

$$\sigma_{y\nu} = \sigma_{yx} \cos(x, \nu) + \sigma_{yy} \cos(y, \nu) + \sigma_{yz} \cos(z, \nu)$$

(84)

$$\sigma_{z\nu} = \sigma_{zx} \cos(x, \nu) + \sigma_{zy} \cos(y, \nu) + \sigma_{zz} \cos(z, \nu)$$

Při přímém řešení úlohy (pracuje se se všemi 15 rovnicemi) nejsou **rovnice kompatibility** samy o sobě nutné (neboť plynou z rovnic(82)) a mohou hrát roli kontrolních rovnic.

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y},$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial y \partial z},$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{zx}}{\partial z \partial x},$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y \partial z},$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z \partial x},$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x \partial y}.$$

(85)

Tři základní způsoby řešení – statická úloha

1. Za základní neznámé vezmeme posunutí bodů tělesa. Potom máme v každém bodě tělesa o souřadnicích x, y, z tři neznámé

$$u_x = f_1(x, y, z), \quad u_y = f_2(x, y, z), \quad u_z = f_3(x, y, z). \quad (\spadesuit)$$

Abychom získali rovnice $(\spadesuit)$ musíme do fyzikálních rovnic (83) dosadit geometrické vztahy (82). To znamená vyjádřit napětí prostřednictvím přetvoření a takto získané výrazy dosadit do tří rovnic rovnováhy, čímž obdržíme tři rovnice typu $(\spadesuit)$.

Tento postup se nazývá **metodou posunutí**.

2. Za neznámé vezmeme napětí. Pak bude v každém bodě tělesa šest neznámých

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= g_1(x, y, z), & \sigma_{yy} &= g_2(x, y, z), & \sigma_{zz} &= g_3(x, y, z), \\ \sigma_{xy} &= g_4(x, y, z), & \sigma_{yz} &= g_5(x, y, z), & \sigma_{xz} &= g_6(x, y, z). \end{aligned} \quad (\ast)$$

Poněvadž napětí nelze určit přímo z rovnic rovnováhy je třeba použít rovnice přetvoření. Použijeme-li například rovnice spojitosti přetvoření (85) můžeme pomocí rovnic (83) a (81) dospět k rovnicím typu $(\ast)$. Tuto metodu nazveme **metoda sil**.

3. Samozřejmě je možná i **metoda smíšená**, při níž za základní neznámé volíme některá posunutí a některá napětí.

Co se týká volby základních neznámých existují tedy v teorii pružnosti tři metody.

a) Přímý způsob – bezprostřední integrace rovnic teorie pružnosti

b) Obrácený způsob – při němž předpokládáme například posunutí jako dané funkce.

Na základě rovnic (82) najdeme přetvoření a následně pomocí (83) napětí.

c) Poloobrácený způsob – volíme jako dané některé vnější síly a částečně posunutí.

Zbytek dopočítáme tak, abychom vyhověli příslušným rovnicím.

Řešení problému teorie pružnosti pomocí posunutí

Základní rovnice upravíme tak, že všechny neznámé vyjádříme prostřednictvím tří posunutí u_x , u_y a u_z , které volíme jako základní.

Z rovnic (83) dostaneme pomocí (82)

$$\sigma_{xx} = 2G \frac{\partial u_x}{\partial x} + \lambda \vartheta, \quad \sigma_{xy} = G \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right), \quad \sigma_{xz} = G \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right), \quad \text{kde } \vartheta = 3\varepsilon_s. \quad (86)$$

Rovnice (86) derivujeme a získáme

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} = G \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + G \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial x}, \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = G \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} + G \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = G \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial z} + G \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}.$$

Po dosazení do první z rovnic (81)

$$\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + G \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial z} \right) + G \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) + X = \rho \frac{d^2 u_x}{dt^2} \quad (*)$$

Výraz v první závorce se dá přepsat kratčeji

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) = \frac{\partial \vartheta}{\partial x},$$

Zavedeme zápis pomocí Laplaceova operátoru $\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} = \nabla^2 u_x$, (87)

kde byl použit operátor druhého řádu pro funkci $u_x = f_1(x, y, z)$.

Potom rovnice (*) se zapíše takto:

Obdobně lze získat další dvě rovnice

Soustava základních rovnic pro metodu posunutí v teorii pružnosti

$$\begin{aligned}(\lambda + G) \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + G \nabla^2 u_x + X &= \rho \frac{d^2 u_x}{dt^2} \\(\lambda + G) \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + G \nabla^2 u_y + Y &= \rho \frac{d^2 u_y}{dt^2} \\(\lambda + G) \frac{\partial \vartheta}{\partial z} + G \nabla^2 u_z + Z &= \rho \frac{d^2 u_z}{dt^2}\end{aligned}\tag{88}$$

Tyto rovnice se nazývají Lamého rovnice. Představují syntézu statického, geometrického a fyzikálního popisu problému.

Okrajové podmínky lze také upravit, tak že se napětí vyjádří pomocí posunutí. Do první rovnice skupiny (84) dosadíme za napětí výrazy podle (86). Potom

$$\sigma_{xv} = \left(\lambda \vartheta + 2G \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) \cos(x, v) + G \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \cos(y, v) + G \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) \cos(z, v).$$

Další rovnice získáme stejným postupem

$$\begin{aligned}\sigma_{xv} &= \lambda \vartheta \cos(x, v) + G \left[\frac{\partial u_x}{\partial x} \cos(x, v) + \frac{\partial u_x}{\partial y} \cos(y, v) + \frac{\partial u_x}{\partial z} \cos(z, v) \right] + G \left[\frac{\partial u_x}{\partial x} \cos(x, v) + \frac{\partial u_y}{\partial x} \cos(y, v) + \frac{\partial u_z}{\partial x} \cos(z, v) \right] \\ \sigma_{yv} &= \lambda \vartheta \cos(y, v) + G \left[\frac{\partial u_y}{\partial x} \cos(x, v) + \frac{\partial u_y}{\partial y} \cos(y, v) + \frac{\partial u_y}{\partial z} \cos(z, v) \right] + G \left[\frac{\partial u_x}{\partial y} \cos(x, v) + \frac{\partial u_y}{\partial y} \cos(y, v) + \frac{\partial u_z}{\partial y} \cos(z, v) \right] \\ \sigma_{zv} &= \lambda \vartheta \cos(z, v) + G \left[\frac{\partial u_z}{\partial x} \cos(x, v) + \frac{\partial u_z}{\partial y} \cos(y, v) + \frac{\partial u_z}{\partial z} \cos(z, v) \right] + G \left[\frac{\partial u_x}{\partial z} \cos(x, v) + \frac{\partial u_y}{\partial z} \cos(y, v) + \frac{\partial u_z}{\partial z} \cos(z, v) \right]\end{aligned}$$

Rovnice (88) spolu s okrajovými podmínkami (89) umožňují řešení problému teorie pružnosti pomocí posunutí.

(89)

Řešení problému teorie pružnosti pomocí napětí

Vše se musí vyjádřit pomocí napětí.

Zjednodušení – objemové síly nepůsobí nebo jsou konstantní.

Tři podmínky rovnováhy $\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + X = 0$, $\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + Y = 0$,
 $\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + Z = 0$ nestačí a je třeba přivzít rovnice kompatibility (85).

V rovnicích kompatibility je nutno nahradit přetvoření prostřednictvím napětí pomocí fyzikálních rovnic (83). Potom získáme rovnice kompatibility (Beltramiho rovnice)

$$\begin{aligned}(1 + \nu)\nabla^2\sigma_{xx} + \rho\frac{d^2\sigma}{dx^2} &= 0, & (1 + \nu)\nabla^2\sigma_{xy} + \rho\frac{d^2\sigma}{dxdy} &= 0, \\(1 + \nu)\nabla^2\sigma_{yy} + \rho\frac{d^2\sigma}{dy^2} &= 0, & (1 + \nu)\nabla^2\sigma_{yz} + \rho\frac{d^2\sigma}{dydz} &= 0, \\(1 + \nu)\nabla^2\sigma_{zz} + \rho\frac{d^2\sigma}{dz^2} &= 0, & (1 + \nu)\nabla^2\sigma_{zx} + \rho\frac{d^2\sigma}{dzdx} &= 0.\end{aligned}\tag{90}$$

kde $\sigma = 3\sigma_s = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}$.

K řešení problému je třeba integrovat devět rovnic (podmínky rovnováhy a rovnice (90)). Libovolné integrační funkce, které se objeví při obecných řešeních uvedených rovnic je třeba určit podle okrajových podmínek

$$\begin{aligned}\sigma_{x\nu} &= \sigma_{xx} \cos(x, \nu) + \sigma_{xy} \cos(y, \nu) + \sigma_{xz} \cos(z, \nu), \\ \sigma_{y\nu} &= \sigma_{yx} \cos(x, \nu) + \sigma_{yy} \cos(y, \nu) + \sigma_{yz} \cos(z, \nu), \\ \sigma_{z\nu} &= \sigma_{zx} \cos(x, \nu) + \sigma_{zy} \cos(y, \nu) + \sigma_{zz} \cos(z, \nu).\end{aligned}$$

Vzniká otázka, zdali je výsledné řešení je jednoznačné.

Pro těleso bez počátečních napětí jsou řešení teorie pružnosti jednoznačná!

Zjednodušení 3D úlohy na 2D a 1D úlohy pružnosti

A. Rovinná napjatost

4

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + X = 0$$

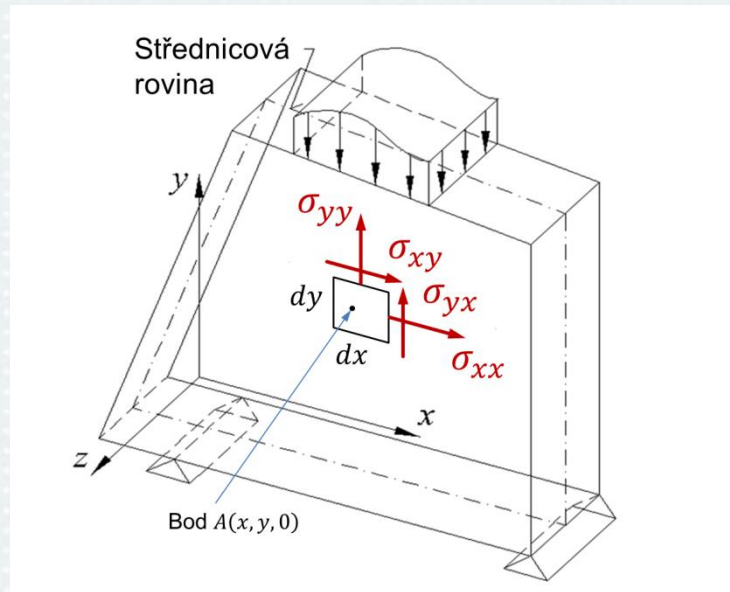
Veškeré rovnice teorie pružnosti se značně zjednoduší, jsou-li napětí rovnoběžná s jednou rovinou – například případ tenké stěny

V tomto případě jsou složky napětí

$$\sigma_{zz} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0.$$

(91)

Střednicová rovina leží v rovině xy ,
zatížení působí v rovině xy ,
konstrukce je vzhledem ke střednicové rovině
uchycena symetricky – tedy uvedené složky
napětí jsou nezávislé na souřadnici z (jsou
konstantními po tloušťce stěny).



Za předpokladu, že na těleso (stěnu) působí pouze jediná objemová síla odpovídající např. tíze (směr $-y$), potom **rovnice rovnováhy** se dají zapsat ve tvaru

Rovnice rovnováhy

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + Y = 0.$$

(92)

Okrajové podmínky

$$\begin{aligned}\sigma_{x\nu} &= \sigma_{xx} \cos(x, \nu) + \sigma_{xy} \cos(y, \nu), \\ \sigma_{y\nu} &= \sigma_{yx} \cos(x, \nu) + \sigma_{yy} \cos(y, \nu).\end{aligned}$$

(93)

Geometrické rovnice

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}.$$

(94)

Fyzikální rovnice

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E} (\sigma_{xx} - \nu \sigma_{yy}), \quad \varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} (\sigma_{yy} - \nu \sigma_{xx}), \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{G} \sigma_{xy} = \frac{2(1 + \nu)}{E} \sigma_{xy}.\end{aligned}$$

(95)

Rovnice kompatibility

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y}.$$

(96)

Rovnice (92), (94), (95), jichž je celkem 8, obsahují 8 neznámých. Tímto se dají řešit. Některé podmínky kompatibility jsou narušeny, řešení je dostatečně přesné při řešení tenkých stěn (rovinné napjatosti tělesa s malou tloušťkou).

Nenulové složky

Nezávislé

$$\begin{aligned}u_x, u_y, \\ \sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}, \\ \varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{xy}.\end{aligned}$$

Závislé

$$\begin{aligned}u_z, \varepsilon_{zz}. \quad \varepsilon_{zz} &= -\frac{\nu}{E} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}), \quad u_z = \varepsilon_{zz} Z. \\ \varepsilon_{zz} &\neq 0, \quad \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zx} = 0.\end{aligned}$$

Maticový zápis fyzikálních rovnic

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix},$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix},$$

(97)

$${}^{RN}\boldsymbol{\sigma} = {}^{RN}\boldsymbol{D} {}^{RN}\boldsymbol{\varepsilon},$$

Matice pružnostních konstant
– rovinná napjatost

$${}^{RN}\boldsymbol{D} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}$$

Zjednodušení

Rovnici kompatibility (96) lze přepsat prostřednictvím napětí (95)

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} (\sigma_{xx} - \nu \sigma_{yy}) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma_{yy} - \nu \sigma_{xx}) = 2(1+\nu) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \sigma_{xy},$$

Uvedená rovnice spolu s rovnicemi rovnováhy tvoří soustavu tří rovnic o třech neznámých. Derivováním rovnic rovnováhy (92) první podle x a druhou podle y a po jejich sečtení a po aplikaci rovnice kompatibility obdržíme

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = -(1+\nu) \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right).$$

Laplaceův operátor Δ
Hamiltonův operátor - nabla ∇

$$\Delta = \nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + X &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + Y &= 0, \\ \nabla^2 (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) &= -(1+\nu) \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

(98)

B. Rovinné přetvoření - rovinná deformace

Předpoklad: Za určitých podmínek posunutí všech bodů tělesa probíhají pouze ve dvou směrech. Posunutí ve všech řezech je stejné.

Platí $\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0,$ (99) $\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0,$
 $\sigma_{zz} \neq 0.$

Pracujeme s výřezem šířky dz (popřípadě s jednotkovou šířkou)

Z výrazu $\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] = 0,$

$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}).$$

Potom $\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} [(1 - \nu^2)\sigma_{xx} - \nu(1 + \nu)\sigma_{yy}],$ $\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} [(1 - \nu^2)\sigma_{yy} - \nu(1 + \nu)\sigma_{xx}].$

Rovnice $\varepsilon_{xy} = \frac{2(1 + \nu)}{E} \sigma_{xy},$ se nemění.

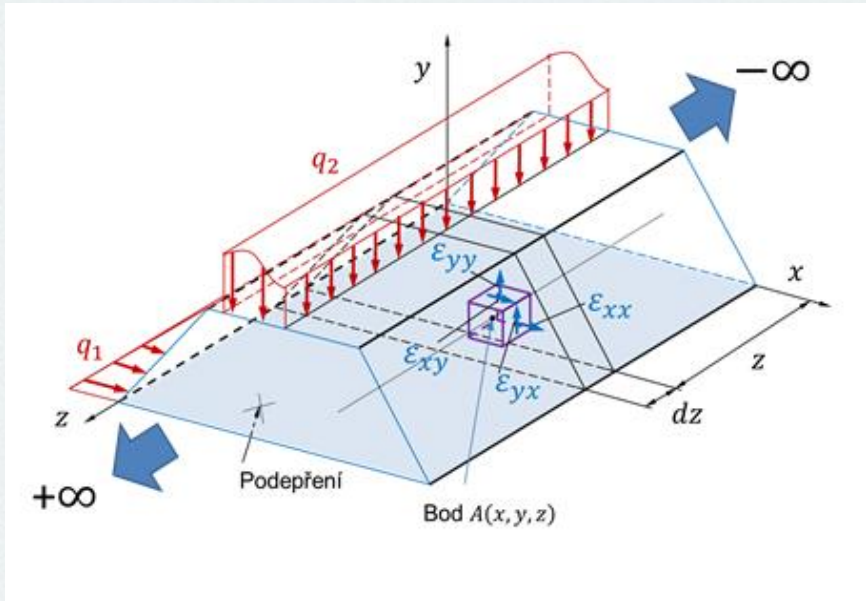
Obdobným postupem jako u RN lze získat

Nenulové složky

Nezávislé $u_x, u_y,$
 $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy},$
 $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{xy}.$

Závislé $\sigma_{zz}.$

$$\sigma_{zz} \neq 0, \quad u_z = 0.$$



Maticový zápis fyzikálních rovnic

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix},$$

$${}^{RD}\boldsymbol{\sigma} = {}^{RD}\mathbf{D} {}^{RD}\boldsymbol{\varepsilon}. \quad (100)$$

Matice pružnostních konstant – rovinné přetvoření (deformace)

$${}^{RD}\mathbf{D} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{(1-\nu)} & 0 \\ \frac{\nu}{(1-\nu)} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix}$$

Funkce napětí pro rovinný problém

Řešení rovinného problému vede na integraci tří rovnic (zatížení pouze vlastní tíhou ve směru svislé osy $Y = konst.$)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + Y &= 0 \\ \nabla^2 (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{H})$$

Představme si, že existuje taková funkce F souřadnic x a y , z níž se vypočte napětí takto:

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} - Yx = \sigma_{yx}. \quad (101)$$

Stačí určit jedinou funkci tak zvanou **funkci napětí**, jejíž prostřednictvím se pak dále hledané funkce určí ne integrováním, ale derivováním.

Snadno se dá ověřit, že taková funkce existuje, neboť dosadíme-li (100) do (99) potom

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + X = \frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + Y = -\frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y} - Y + \frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y} + Y = 0$$

Rovnice jsou identicky splněny.

Abychom zjistili jakého druhu jsou samotné rovnice F , dosadíme (101) do poslední rovnice (99) a odtud vyjde, že funkce napětí musí vyhovovat rovnici

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0$$

(102) nebo $\nabla^4 F = 0,$

kde $\nabla^4(\) = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$ je biharmonický operátor, $\nabla^4(\) = \nabla^2[\nabla^2(\)]$.

Jde-li o problém rovinný $\nabla^4(F(x, y)) = \nabla^2[\nabla^2(F)] = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(F)\right]$.

Funkce napětí $F(x, y)$ se nazývá **Airyho funkce napětí**. Je ji výhodné použít při řešení. V případě, že nebereme do úvahy objemové síly, lze získat z Lamého rovnic $\nabla^2 \varepsilon^I = 0$. Potom lze říci, že objemová změna ε^I je harmonická funkce.

Složky pružného posunutí jsou biharmonické funkce $\nabla^4 u_x = 0, \nabla^4 u_y = 0, \nabla^4 u_z = 0$.

Složky stavu napětí jsou biharmonické funkce $\nabla^4 \sigma_{xx} = \nabla^4 \sigma_{yy} = \nabla^4 \sigma_{zz} = \nabla^4 \sigma_{xy} =$
 $= \nabla^4 \sigma_{yz} = \nabla^4 \sigma_{zx} = 0.$

C. Rotačně symetrická úloha – řešení nádrží, kopulí atd.

Odvození se neprovádí v kartézském systému souřadnic, ale ve válcovém systému souřadnic.

Souřadnice r, θ, z .

Podmínky rovnováhy

Opět platí $\sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta r}, \sigma_{rz} = \sigma_{zr}, \sigma_{\theta z} = \sigma_{z\theta}$.

Podmínka rovnováhy pro směr r (radiální)

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + R = 0 \quad (103a)$$

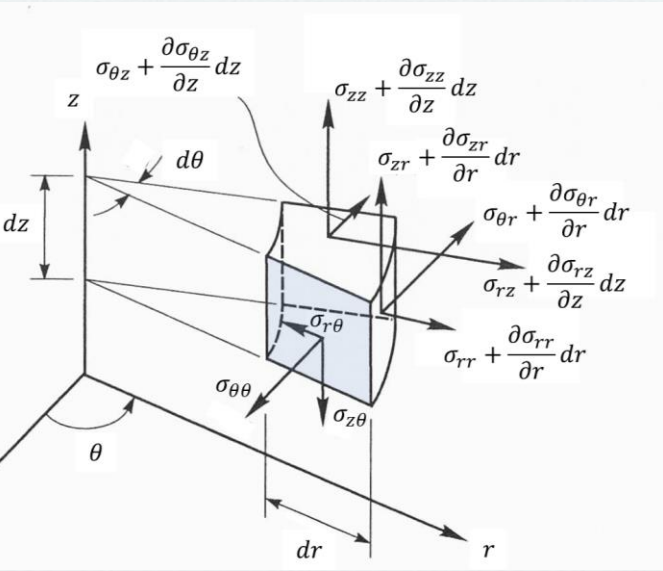
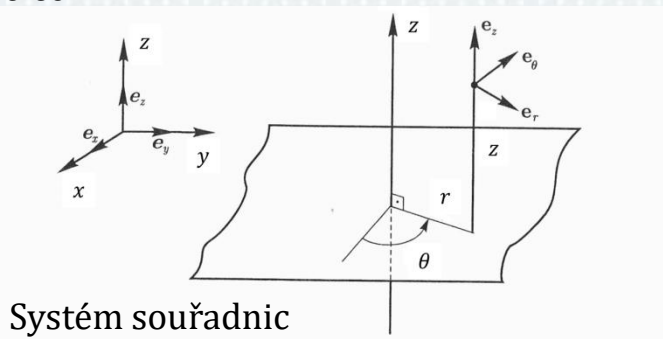
Podmínka rovnováhy pro směr θ (obvodový)

$$\frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + 2 \frac{\sigma_{\theta r}}{r} + \phi = 0 \quad (103b)$$

Podmínka rovnováhy pro směr z (svislý)

$$\frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{zr}}{r} + Z = 0 \quad (103c)$$

Úloha je rotačně symetrická a $\phi = 0$
- rov. 103b se plní z podmínek sym.



Označení napětí na elementárním výseku
 $\frac{\partial(\cdot)}{\partial \theta} = 0$, potom $\sigma_{r\theta} = \sigma_{z\theta} = 0$

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + R = 0,$$
$$\frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{zr}}{r} + Z = 0.$$

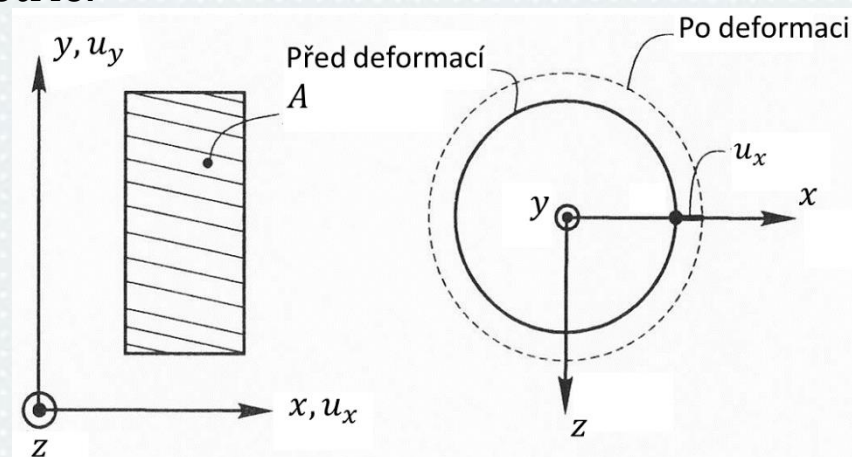
(104)

Když máme rotačně symetrické podmínky, potom posunutí, přetvoření a napětí jsou stejná v libovolné rovině, která obsahuje osu symetrie.

Potom lze úlohu formulovat v rovině odpovídající pravoúhlému systému souřadnic. V našem případě x, y . Osa y je osou symetrie.

Podmínky rovnováhy lze zapsat takto

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{zz}}{x} + X &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\sigma_{xy}}{x} + Y &= 0. \end{aligned} \quad (105)$$



Členy $\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{zz}}{x}$ a $\frac{\sigma_{xy}}{x}$ jsou navíc vůči předchozím rovinným úlohám.

Geometrické rovnice

Posunutí $u_x = u_x(x, y)$, $u_y = u_y(x, y)$ a $u_z = 0$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}, \quad \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0. \quad (106)$$

Dále $\varepsilon_{zz} = \frac{2\pi(x + u_x) - 2\pi x}{2\pi x} = \frac{u_x}{x}$ obvodová deformace.

Fyzikální rovnice

$${}^{RS}\boldsymbol{\sigma} = {}^{RS}\mathbf{D} {}^{RS}\boldsymbol{\varepsilon}.$$

(107)

$\mathbf{D}^{RS}$ je matice pružnostních konstant

$${}^{RS}\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{zz} \end{Bmatrix}, \quad {}^{RS}\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{zz} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{D}^{RS} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & \frac{\nu}{1-\nu} \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 & \frac{\nu}{1-\nu} \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (108)$$

Řešení rovinné úlohy v napětích - příklad

1. Řešení rovinné úlohy pomocí polynomů

Využívají se analytické funkce vyhovující biharmonické rovnici $\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0$.

Aplikují se polynomy různých řádů $\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} - Yx = \sigma_{yx}.$

Polynom prvního řádu $F_1 = a_1 x + b_1 y$ nestačí neboť napětí jsou rovny nule.

Polynom druhého řádu $F_2 = \frac{a_2}{2} x^2 + b_2 xy + \frac{c_2}{2} y^2. \quad (109)$

$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} = 0, \quad \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} = 0 \quad \text{a} \quad \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0.$ Polynom je biharmonickou funkcí při libovolných hodnotách a_2, b_2 a c_2 .

Polynom třetího řádu

$F_3 = \frac{a_3}{3 \cdot 2} x^3 + \frac{b_3}{2 \cdot 1} x^2 y + \frac{c_3}{1 \cdot 2} xy^2 + \frac{d_3}{2 \cdot 3} y^3. \quad (110)$ Polynom je biharmonickou funkcí při libovolných hodnotách a_2, b_2 a c_2 .

Polynom čtvrtého řádu

$$f_4 = \frac{a_4}{4 \cdot 3} x^4 + \frac{b_4}{3 \cdot 2} x^3 y + \frac{c_4}{2 \cdot 2} x^2 y^2 + \frac{d_4}{2 \cdot 3} xy^3 + \frac{e_4}{3 \cdot 4} y^4.$$

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} = 2a_4, \quad \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} = c_4 \quad \text{a} \quad \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 2e_4.$$

Po dosazení do biharmonické rovnice $2a_4 + 2c_4 + 2e_4 = 0$. Odtud $e_4 = -a_4 - c_4$.

Čtyři koeficienty mohou být nezávislé a pátý nechť odpovídá rovnici pro e_4 .

Biharmonická funkce čtvrtého řádu

$$F_4 = a_4 \left(\frac{x^4}{4 \cdot 3} - \frac{y^4}{3 \cdot 4} \right) + \frac{b_4}{3 \cdot 2} x^3 y + c_4 \left(\frac{x^2 y^2}{2 \cdot 2} - \frac{y^4}{3 \cdot 4} \right) + \frac{d_4}{2 \cdot 3} x y^3. \quad (111)$$

Polynom pátého řádu

$$\varphi_5 = \frac{a_5}{5 \cdot 4} x^5 + \frac{b_5}{4 \cdot 3} x^4 y + \frac{c_5}{3 \cdot 2} x^3 y^2 + \frac{d_5}{2 \cdot 3} x^2 y^3 + \frac{e_5}{3 \cdot 4} x y^4 + \frac{f_5}{4 \cdot 5} y^5$$

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} = 6a_5 x + 2b_5 y, \quad \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} = c_5 x + 2d_5 y \quad \text{a} \quad \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 2e_5 x + 6f_5 y.$$

$$2(3a_5 + 2c_5 + e_5)x + 2(b_5 + 2d_5 + 3f_5)y = 0$$

Závorky se musí rovnat nule $3a_5 + 2c_5 + e_5 = 0, \quad b_5 + 2d_5 + 3f_5 = 0.$

Odtud $e_5 = -3a_5 - 2c_5, \quad f_5 = -\frac{b_5}{3} - \frac{2d_5}{3}.$ Potom po dosazení do původní rovnice

$$F_5 = \frac{a_5}{5 \cdot 4} (x^5 - 5xy^4) + \frac{b_5}{4 \cdot 3} \left(x^4 y - \frac{1}{5} y^5 \right) + \frac{c_5}{3 \cdot 2} (x^3 y^2 - xy^4) + \frac{d_5}{2 \cdot 3} \left(x^2 y^3 - \frac{1}{5} y^5 \right) \quad (112)$$

je již biharmonická funkce pátého řádu.

Pomocí algebraických polynomů je možné řešit řadu jednoduchých úloh:
čistý ohyb nosníku, ohyb konzolového nosníku, ohyb prostého nosníku apod.

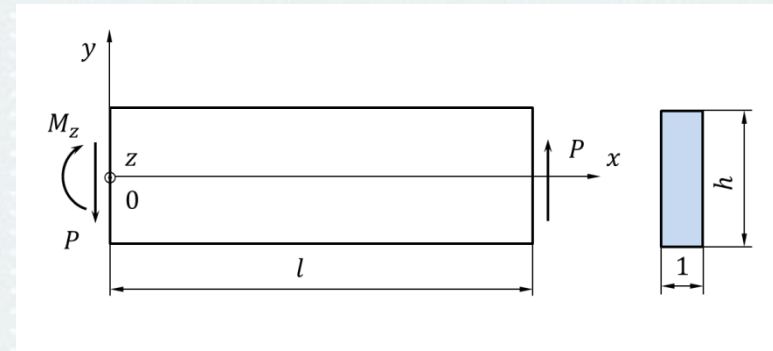
V některých případech pro řešení rovinné úlohy lze použít jako funkce napětí $F(x, y)$ trigonometrické funkce.

Ohyb konzoly od síly přiložené na konci

Řešení v napětích

Vyjdeme z řešení získané v základní pružnosti.

$$\sigma_{xx} = \frac{M_z}{I_z} y, \quad \sigma_{yy} = 0, \quad \sigma_{xy} = \sigma_{yx} = \frac{V_y S_z^o}{I_z b(y)}. \quad (a)$$



Ohybový moment $M_z = -P(l - x)$, posouvající síla $V_y = P$.

Moment setrvačnosti Šířka průřezu

Statický moment plochy

$$I_z = \frac{1 \cdot h^3}{12}$$

$$b(y) = 1$$

$$S_z^o = \frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

$$\sigma_{xx} = -\frac{12P}{h^3} (l - x)y, \quad \sigma_{yy} = 0, \quad \sigma_{xy} = \frac{6P}{h^3} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right). \quad (b)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + X = 0,$$

$$\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + Y = 0,$$

$$\nabla^2(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = 0.$$

Vliv vlastní tíhy není do výpočtu zahrnut.

$$\frac{12P}{h^3} y + \frac{6P}{h^3} (-2y) + 0 = 0, \quad 0 + 0 + 0 = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y}$$

Funkce napětí (b) vyhovují základním rovnicím rovinné napjatosti.

Podmínky na hranici. Na horní a dolní hraně nosníku není zatížení.

Potom při $y = \pm \frac{h}{2}$, $\sigma_{yy} = 0$, $\sigma_{xy} = 0$.

$$0 + 0 = 0$$

Na bočních hranách smykové napětí musí odpovídat velikosti síly P . Funkce rozdělení síly P na bocích není známo, musí se použít zápis pro napětí v integrálním tvaru:

při $x = 0$ a $x = l$, $\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xy} dy = P$, $\sigma_{xy} = \frac{6P}{h^3} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$. Po dosazení a integraci na $P = P$.

Normálové napětí na boční hraně $x = l$ se rovná nule $\sigma_{xx} = -\frac{12P}{h^3} (l - l)y = 0$.

Na boční hraně $x = 0$ $\sigma_{xx} = -\frac{12Pl}{h^3} y$. Musí platit $\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xx} y dy = M_z$. Po integraci

$-Pl = M_z$. Tímto je potvrzena platnost vztahu pro výpočet normálového napětí získaného v inženýrské teorii pružnosti.

Dále je nutno vyčíslit funkce přetvoření a posunutí.

$$\begin{aligned} \text{Přetvoření} \quad \varepsilon_{xx} &= -\frac{12P}{Eh^3} (l - x)y = \frac{\partial u_x}{\partial x}, & \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E} (\sigma_{xx} - \nu \sigma_{yy}), \\ \varepsilon_{yy} &= \nu \frac{12P}{Eh^3} (l - x)y = \frac{\partial u_y}{\partial y}, & \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E} (\sigma_{yy} - \nu \sigma_{xx}), \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{12(1 + \nu)P}{Eh^3} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}. & \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{G} \sigma_{xy} = \frac{2(1 + \nu)}{E} \sigma_{xy}. \end{aligned} \quad (c)$$

Posunutí získáme integrací.

$$u_x = \frac{12P}{Eh^3} \left[\left(lx - \frac{x^2}{2} \right) y + f_1(y) \right], \quad u_y = \frac{12P}{Eh^3} \left[\nu(l - x) \frac{y^2}{2} + f_2(x) \right]. \quad (d)$$

Po dosazení výrazů u_x a u_y do $\frac{12(1+\nu)P}{Eh^3} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}$ obdržíme

$$\frac{12(1+\nu)P}{Eh^3} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) = \frac{12P}{Eh^3} \left[- \left(lx - \frac{x^2}{2} \right) + f_1'(y) \right] + \frac{12P}{Eh^3} \left[-\nu \frac{y^2}{2} + f_2'(x) \right].$$

Nebo
$$\underbrace{\left[f_2'(x) - \left(lx - \frac{x^2}{2} \right) \right]}_{C_1} + \underbrace{\left[f_1'(y) + \frac{2+\nu}{2} y^2 \right]}_{C_2} = (1+\nu) \frac{h^2}{4}. \quad (e)$$

Rovnice existuje při libovolných hodnotách x a y pouze když hodnoty v hranatých závorkách jsou konstantami $f_2'(x) - \left(lx - \frac{x^2}{2} \right) = C_1$, $f_1'(y) + \frac{2+\nu}{2} y^2 = C_2$.

Po integraci $f_2(x) = \frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} + C_1x + C_3$, $f_1(y) = -\frac{2+\nu}{6} y^3 + C_2y + C_4$. (f)

Konstanty C_1, C_2, C_3 a C_4 se určí z okrajových podmínek uložení nosníku.

Omezení posunutí bodu $x = y = 0$, $u_x(0,0) = 0$, $u_y(0,0) = 0$. Omezení natočení

v tomtéž bodu $\frac{\partial u_y(0,0)}{\partial x} = 0$. Z podmínek f) $C_4 = C_3 = C_1 = 0$ a C_2 se určí z výrazu e)

$C_1 + C_2 = (1+\nu) \frac{h^2}{4}$. Potom $C_2 = (1+\nu) \frac{h^2}{4}$.

$$u_x = \frac{12P}{Eh^3} \left[\left(l - \frac{x}{2} \right) xy + \underbrace{-\frac{2+\nu}{6} y^3 + (1+\nu) \frac{h^2}{4} y}_{\text{from (e)}} \right], \quad u_y = \frac{12P}{Eh^3} \left[\nu(l-x) \frac{y^2}{2} + \underbrace{\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}}_{\text{from (f)}} \right].$$

Při $y = 0$, $u_y = \frac{12P}{Eh^3} \left[\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right] = \frac{P}{3EI_z} \left[\frac{3lx^2}{2} - \frac{x^3}{2} \right]$. Při $x = l$, $u_y = \frac{Pl^3}{3EI_z}$.

Podle vztahu $u_x = \frac{12P}{Eh^3} \left[\left(lx - \frac{x}{2} \right) xy + -\frac{2+\nu}{6} y^3 + (1+\nu) \frac{h^2}{4} y \right]$ průřez po výšce není již rovinný a je zakřiven podle kubické paraboly.

Prostý nosník zatížený rovnoměrně spojitým zatížením - řešení v napětích

Řešení pomocí polynomů. Funkce sestává z biharmonické funkce páté, třetí a druhé mocniny. V dané úloze osa y je osou symetrie, potom funkce napětí obsahující členy s x v liché mocnině je vhodné vynechat.

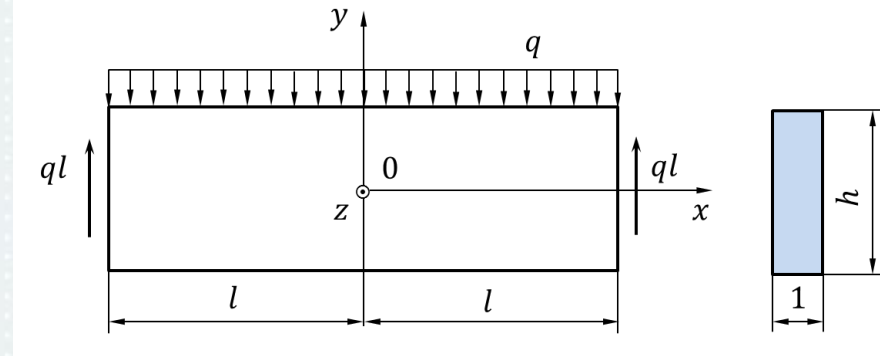
Potom

$$F = \frac{b_5}{4 \cdot 3} \left(x^4 y - \frac{1}{5} y^5 \right) + \frac{d_5}{2 \cdot 3} \left(x^2 y^3 - \frac{1}{5} y^5 \right) + \frac{b_3}{2 \cdot 1} x^2 y + \frac{d_3}{2 \cdot 3} y^3 + \frac{a_2}{2} x^2 + \frac{c_2}{2} y^2. \quad (a)$$

Po dosazení do rovnic $\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$, $\sigma_{yy} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$, $\sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} - Yx$.

$$\sigma_{xx} = -\frac{b_5}{3} y^3 + d_5 \left(x^2 y - \frac{2}{3} y^3 \right) + d_3 y + c_2, \quad (b)$$

$$\sigma_{yy} = b_5 x^2 y + \frac{d_5}{3} y^3 + b_3 y + a_2, \quad \sigma_{xy} = -\frac{b_5}{3} x^3 - d_5 x y^2 - b_3 x.$$



Okrajové podmínky:

na dolní hraně nosníku $y = -\frac{h}{2} = -s, \quad \sigma_{yy} = 0, \quad \sigma_{yx} = 0.$

na horní hraně nosníku $y = +\frac{h}{2} = +s, \quad \sigma_{yy} = -q, \quad \sigma_{yx} = 0,$

Po dosazení do rovnic (b)

$$\begin{aligned} -b_5 s x^2 - \frac{d_5}{3} s^3 - b_3 s + a_2 &= 0, & -\frac{b_5}{3} x^3 - d_5 s^2 x - b_3 x &= 0, \\ b_5 s x^2 + \frac{d_5}{3} s^3 + b_3 s + a_2 &= -q, & -\frac{b_5}{3} x^3 - d_5 s^2 x - b_3 x &= 0, \end{aligned}$$

Rovnice se rozpadnou na nezávislé rovnice

$$b_5 = 0, \quad -\frac{d_5}{3} s^3 - b_3 s + a_2 = 0, \quad d_5 s^2 + b_3 = 0, \quad \frac{d_5}{3} s^3 + b_3 s + a_2 = -q.$$

Řešením soustavy $a_2 = -\frac{q}{2}, \quad b_3 = -\frac{3q}{4s}, \quad d_5 = +\frac{3q}{4s^3}.$

Okrajové podmínky na bočních hranách: při $x = \pm l, \quad \sigma_{xx} = 0, \quad \int_{-s}^s \sigma_{xy} dy = \pm ql. \quad (c)$

Způsob rozdělení tečného napětí na bočních hranách není znám. Známe pouze výslednici. Po dosazení rovnice (b) do (c) se ukáže její platnost.

Normálová napětí σ_{xx} při $x = \pm l$ se rovnají:

$$\sigma_{xx} = \frac{3q}{4s^2} \left(l^2 y - \frac{2}{3} y^3 \right) + d_3 y + c_2. \quad (d)$$

Nenabývají nulové hodnoty – není možné vyhovět okrajové podmínce.

Podíváme se jak vypadají přibližné okrajové podmínky. Výslednice normálových napětí se musí rovnat nule.

$$\text{Při } x = \pm l, \quad \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xx} dy = 0, \quad \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xx} y dy = 0. \quad (\text{e}) \quad \text{Silová a momentová podmínka.}$$

Do integrálů dosadíme rovnici (b)

$$\int_{-s}^s \left[\frac{3q}{4s^2} \left(x^2 y - \frac{2}{3} y^3 \right) + d_3 y + c_2 \right] dy = 0, \quad \int_{-s}^s \left[\frac{3q}{4s^2} \left(x^2 y - \frac{2}{3} y^3 \right) + d_3 y + c_2 \right] y dy = 0.$$

$$\text{Po integraci najdeme } c_2 = 0 \quad \text{a} \quad d_3 = -\frac{3q}{4s^2} \left(l^2 - \frac{2}{5} s^2 \right).$$

Přibližné okrajové podmínky na bocích nosníku jsou splněny. Záměna přesné okrajové podmínky (c) pro normálové napětí σ_{xx} podmínkami (e) v integrálním tvaru se nazývá změkčením (oslabením) okrajových podmínek. Nepřesnost se projeví pouze na koncích v souladu se Saint-Venantovým principem lokálnosti.

Po dosazení nalezených konstant do rovnic (b)

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= -\frac{3q}{4s^3} (l^2 - x^2) y - \frac{3q}{4s^3} \left(\frac{2}{3} y^2 - \frac{2}{5} s^2 \right) y, \\ \sigma_{yy} &= -\frac{q}{4} \left(\frac{y^3}{s^3} - 3 \frac{y}{s} - 2 \right) \quad \text{a} \quad \sigma_{xy} = \frac{3q}{4s^3} (s^2 - y^2) x. \end{aligned} \quad (\text{f})$$

Porovnání se vztahy získanými ze základní pružnosti

$$\sigma_{xx}^0 = \frac{M_z}{I_z} y = \frac{-\frac{q}{2}(l^2 - x^2)y}{\frac{2}{3}s^3} = -\frac{3q}{4s^3}(l^2 - x^2)y,$$

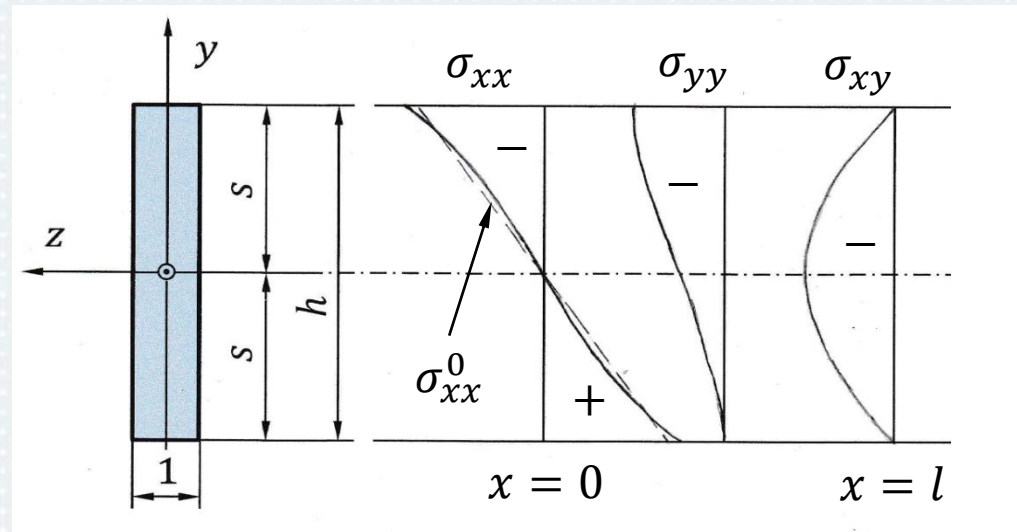
$$\sigma_{yy}^0 = 0,$$

$$\sigma_{xy}^0 = -\frac{3q}{4s^3}(s^2 - y^2)x.$$

V řezu $x = 0$, uprostřed nosníku

$$\max \sigma_{xx} = -\frac{3ql^2}{4s^3} \left(1 + \frac{4}{15} \cdot \frac{s^2}{l^2} \right),$$

$$\max \sigma_{xx}^0 = -\frac{3ql^2}{4s^3}.$$



Po celé délce $\max \sigma_{yy} = -q, \quad \max \sigma_{yy}^0 = 0.$

Na koncích nosníku $x = \pm l \quad \sigma_{xy} = \frac{3q}{4s^3}(s^2 - y^2)x, \quad \sigma_{xy}^0 = -\frac{3q}{4s^3}(s^2 - y^2)x.$

Rozdíl v normálových napětích závisí na poměru výšky nosníku k jeho délce. U nosníku s délkou $l = 10s$, u nosníku s poměrem výšky ku délce $1/5$ je rozdíl $\frac{4}{15} \%$.

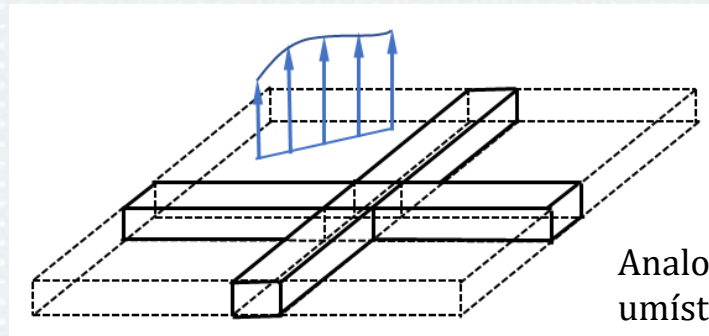
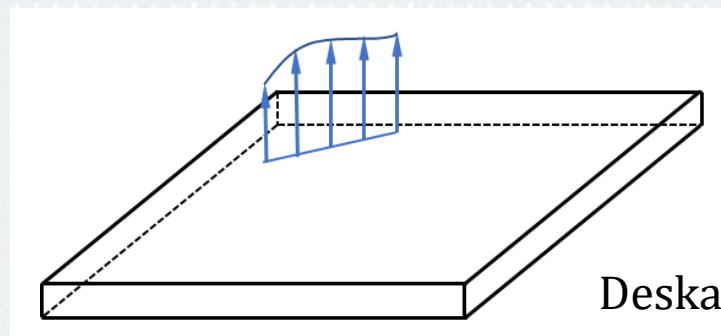
V základní pružnosti se napětí σ_{yy} zanedbává. Zde vyšlo rovno $-q$.

Při porovnání chyby u nosníku s délkou $l = 10s$ lze uvést že poměr

$$\frac{|\max \sigma_{yy}|}{\max \sigma_{xx}} 100 \% = 1,33 \%. \quad \text{Toto potvrzuje použitelnost hypotézy u nízkých nosníků, že podélná vlákna na sebe prakticky netlačí.}$$

Základní přístupy k řešení ohýbaných desek

Deska je prostorové těleso podobně jako stěna. Odlišnost je ve způsobu zatížení. Desky jsou zatíženy příčně na rozdíl od stěn, kde výslednice sil leží ve střednicové rovině.



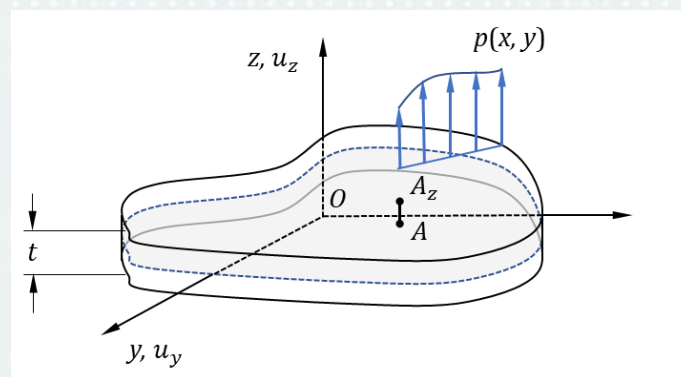
Analogie s ortotropně umístěnými nosníky

Úloha ohýbaných desek je obecně úlohou třídimenzionální, ale za určitých předpokladů ji lze převést na úlohu dvojdimenzionální.

1 Klasická Kirchhoffova teorie tenkých desek

Tenkými deskami nazýváme desky, pro jejichž poměr tloušťek t k nejmenšímu charakteristickému rozměru b v půdorysu platí nerovnost $\frac{1}{5} \geq \frac{t}{b} \geq \frac{1}{80}$ a velikost předpokládaných průhybů není větší než $\frac{1}{4}t$. Uvedené předpoklady vycházejí z praktického přístupu k řešení, a proto nemusí být pravidlem.

Mějme desku (viz obrázek) v pravoúhlé soustavě souřadnic x, y, z



Přemístění libovolného bodu A_z je funkcí tří souřadnic x, y , a z . Bod A_z leží na kolmici ke střednicové rovině v bodě A . Potom

$$u_x = u_x(x, y, z) = u_{x0}(x, y, z) + \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} \right) z, \quad u_y = u_y(x, y, z) = u_{y0}(x, y, z) + \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} \right) z$$

a $u_z = u_z(x, y, z) = u_{z0}(x, y, z),$

kde $u_{x0}(x, y, z)$, $u_{y0}(x, y, z)$ a $u_{z0}(x, y, z)$ jsou posunutí bodu $A(x, y, 0)$.

Zavedeme-li předpoklad o nedeformovatelnosti střednicové plochy v rovině x, y , potom

$u_{x0}(x, y, 0) = u_{y0}(x, y, 0) = 0$ a o nestlačitelnosti desky po tloušťce lze zapsat

$$u_x = u_x(x, y, z) = \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} \right)_{z=0} z, \quad u_y = u_y(x, y, z) = \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} \right)_{z=0} z, \quad u_z = u_z(x, y, z) = u_{z0}(x, y, 0)$$

Parciální derivace $\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} \right)_{z=0}$ a $\left(\frac{\partial u_y}{\partial z} \right)_{z=0}$ jsou závislé pouze na x, y .

Ze závislosti mezi posunutími a deformacemi vyplývá

$$\varepsilon_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial u_y}{\partial z} = \varepsilon_{yz} - \frac{\partial u_z}{\partial y}, \quad \varepsilon_{zx} = \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \Rightarrow \frac{\partial u_x}{\partial z} = \varepsilon_{zx} - \frac{\partial u_z}{\partial x}.$$

Za předpokladu, že smykové deformace $\varepsilon_{yz} = 0, \varepsilon_{zx} = 0$. $\frac{\partial u_x}{\partial z} = -\frac{\partial u_z}{\partial x}, \frac{\partial u_y}{\partial z} = -\frac{\partial u_z}{\partial y}.$

Nakonec $u_z = u_z(x, y), \quad u_x = -\left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right) z \quad \text{a} \quad u_y = -\left(\frac{\partial u_z}{\partial y} \right) z. \quad (113)$

Geometricko-deformační vztahy

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x} = -z \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \right), \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial u_y}{\partial y} = -z \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \right), \quad (114) \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = -z \left(2 \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} \right).\end{aligned}$$

Ostatní deformace jsou nulové.

Křivosti deformované plochy

$$\kappa_x = \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}, \quad \kappa_y = \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \quad \text{a} \quad \kappa_{xy} = \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y}.$$

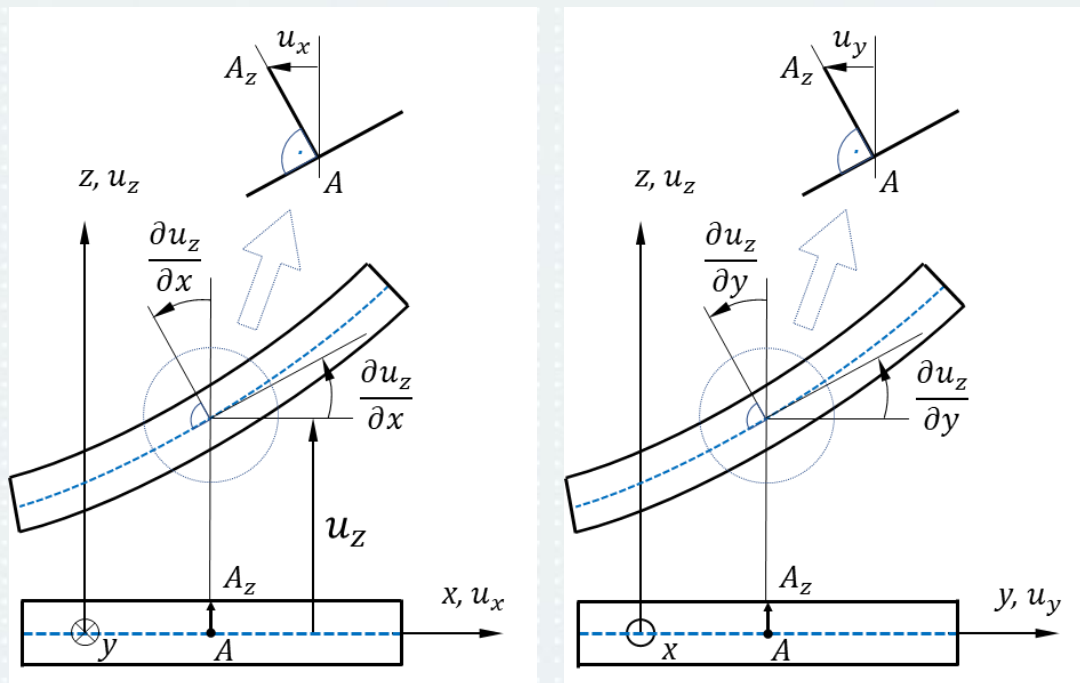
Konstitutivní rovnice – fyzikální rovnice

Lze uvažovat, že deska je tvořena tenkými vrstvami.

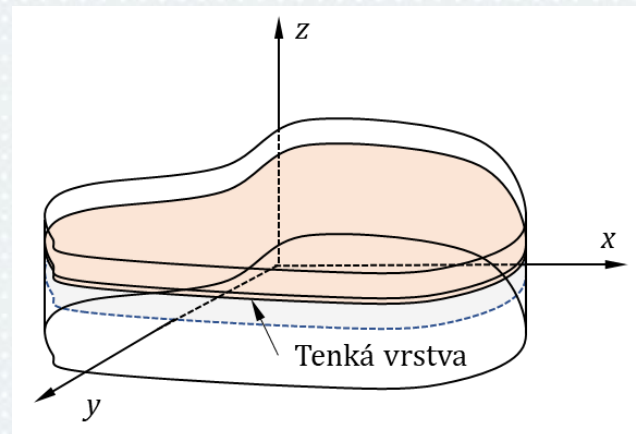
Každá vrstva je ve stavu rovinné napjatosti. Tedy

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix},$$

Do uvedené soustavy rovnic dosadíme geometricko-deformační vztahy pro desku.



Řezy nedeformovanou a deformovanou deskou

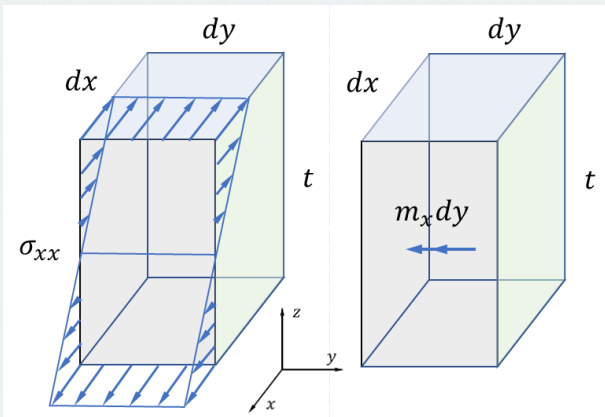


Deska skládající se z tenkých vrstev

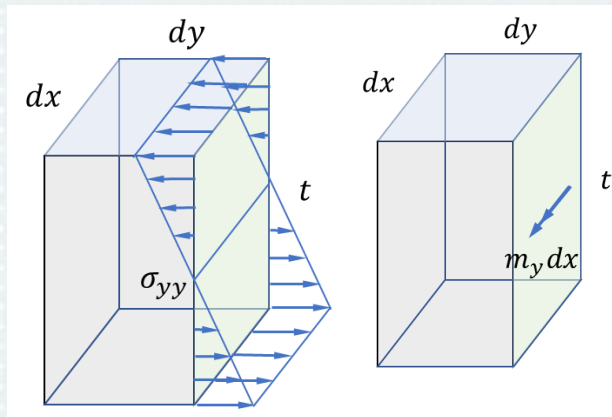
$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} &= \frac{E}{(1-\nu^2)} (\varepsilon_{xx} + \nu \varepsilon_{yy}) = \frac{Ez}{(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \right), \\
 \sigma_{yy} &= \frac{E}{(1-\nu^2)} (\varepsilon_{yy} + \nu \varepsilon_{xx}) = \frac{Ez}{(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \right), \\
 \sigma_{xy} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \varepsilon_{xy} = -\frac{Ez}{(1+\nu)} \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y}.
 \end{aligned} \tag{115}$$

Rovnice ukazují na to, že napětí po tloušťce se mění lineárně.

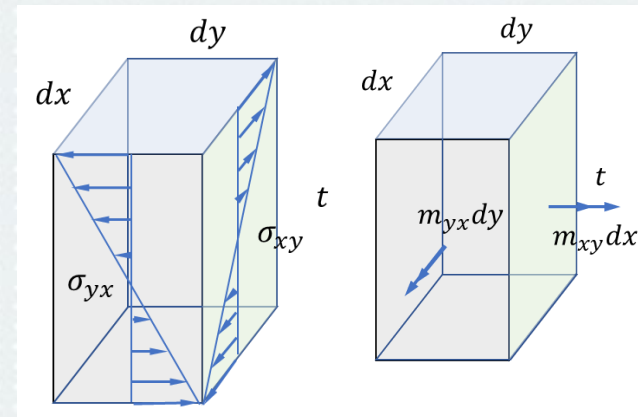
Výslednice napětí – na obrázcích je zobrazení pro kladné hodnoty křivosti



Napětí a výslednice napětí



Napětí a výslednice napětí



Napětí a výslednice napětí

Výslednice moment na jednotku délky [Nm/m] od komponenty napětí σ_{xx}

$$m_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{xx}(-z)dz = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \right)$$

Označme $D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$. D je ohybová tuhost desky. Potom

$$m_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{xx}(-z)dz = D \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \right), \quad (\text{měrný ohybový moment})$$

$$m_y = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{yy}(-z)dz = D \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \right), \quad (\text{měrný ohybový moment}) \quad (116)$$

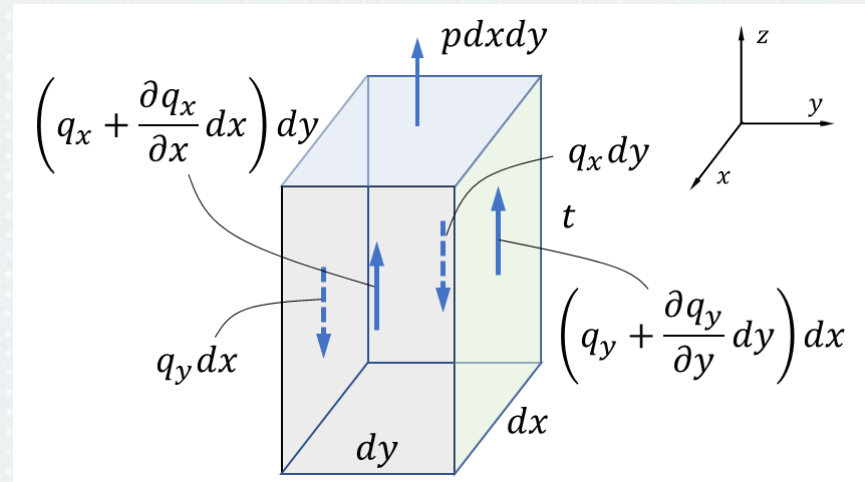
$$m_{xy} = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{xy}zdz = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y}, \quad m_{yx} = -m_{xy}. \quad (\text{měrné krouticí momenty})$$

Podmínky rovnováhy

Silová podmínka pro směr z

$$\begin{aligned} & -q_x dy + \left(q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \right) dy - q_y dx \\ & + \left(q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy \right) dx + p dx dy = 0. \end{aligned}$$

Po úpravě $\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} = -p$



Po úpravě

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} = -p \quad (116a)$$

Momentová podmínka vzhledem k ose x při vyloučení infinitesimální členů vyšších řádů

$$(q_y dx) dy - m_y dx + \left(m_y + \frac{\partial m_y}{\partial y} dy \right) dx - m_{yx} dy + \left(m_{yx} + \frac{\partial m_{yx}}{\partial x} dx \right) dy = 0.$$

Po úpravě

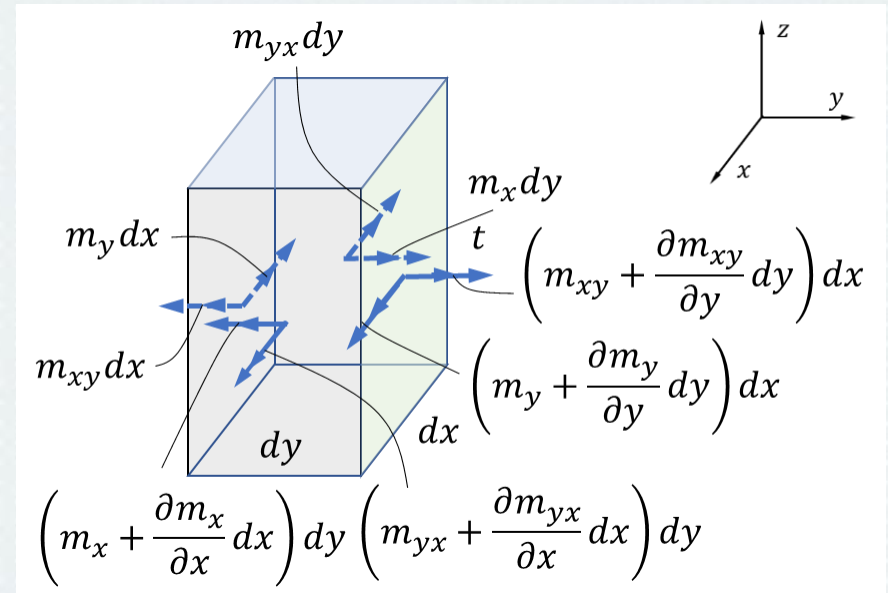
$$\frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_{yx}}{\partial x} = -q_y. \quad (116b)$$

Momentová podmínka vzhledem k ose y při vyloučení infinitesimální členů vyšších řádů

$$-(q_x dy) dx + m_x dy - \left(m_x + \frac{\partial m_x}{\partial x} dx \right) dy - m_{xy} dx + \left(m_{xy} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} dy \right) dx = 0.$$

Po úpravě

$$\frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} = -q_x. \quad (116c)$$



Diferenciální rovnice

Spojením geometricko-deformačních a konstitutivních (fyzikálních) s podmínkami rovnováhy lze získat diferenciální rovnice Kirchhoffovy teorie ohybu tenkých desek

Z podmínek rovnováhy

$$\frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_{yx}}{\partial x} = -q_y, \quad \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} = -q_x \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} = -p$$

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} = p \quad \text{při} \quad m_{yx} = -m_{xy}.$$

Dále po dosazení za momenty funkci průhybu střednicové plochy získáme konečnou rovnici

$$\frac{\partial^4 u_z}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 u_z}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u_z}{\partial y^4} = \frac{p}{D}. \quad (117)$$

Pro řešení je potřeba znát **okražové podmínky** uložení desky.

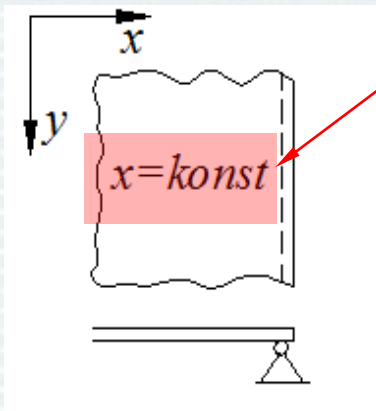
Nakonec z podmínek rovnováhy elementu (momentové k x, y) po dosazení výrazů pro momenty získáme měrné příčné (posouvající) síly

$$q_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{zx} dz = -D \left(\frac{\partial^3 u_z}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 u_z}{\partial x \partial y^2} \right)$$
$$q_y = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{yz} dz = -D \left(\frac{\partial^3 u_z}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 u_z}{\partial y \partial x^2} \right)$$
(118)

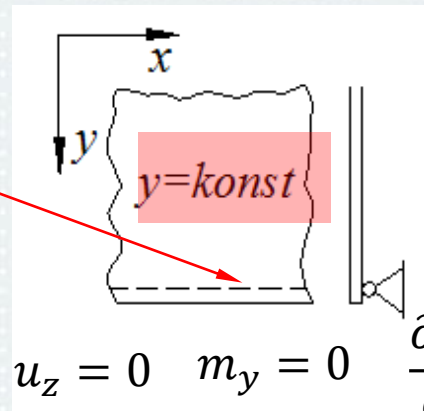
Základní okrajové podmínky

a) Prosté podepření okraje

Liniové podepření



$$\begin{aligned} u_z &= 0 \\ m_x &= 0 \\ \frac{\partial u_z}{\partial y} &= 0 \end{aligned}$$



$$u_z = 0 \quad m_y = 0 \quad \frac{\partial u_z}{\partial x} = 0$$

Pro okraj $x = konst.$ $\Rightarrow u_z = \frac{\partial u_z}{\partial y} = \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^i u_z}{\partial y^i} = 0$

i – libovolné kladné číslo

Pro okraj $y = konst.$ $\Rightarrow u_z = \frac{\partial u_z}{\partial x} = \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} = \frac{\partial^i u_z}{\partial x^i} = 0$

Kinematické (geometrické) okrajové podmínky

$x = konst.$ $\Rightarrow u_z = 0, \quad \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} = 0$

$y = konst.$ $\Rightarrow u_z = 0, \quad \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} = 0$

Je-li současně $\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} = 0$ a $\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} = 0$, potom $m_x = m_y = 0$.

Silové okrajové podmínky:

$x = konst.$ $\Rightarrow m_x = 0, \quad t_r \neq 0$
 $m_y = 0, \quad m_{xy} \neq 0$

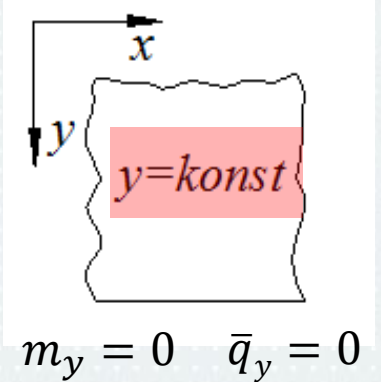
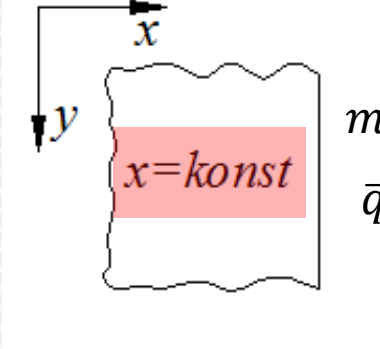
$y = konst$ $\Rightarrow m_x = 0, \quad t_r \neq 0$
 $m_y = 0, \quad m_{xy} \neq 0$

b) Volný okraj

Doplněná posouvající síla náhrada za

m_{xy} a $q_x \rightarrow \bar{q}_x$

m_{xy} a $q_y \rightarrow \bar{q}_y$



Doplněné posouvající síly určíme takto

$\bar{q}_x = q_x + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} = 0$ a $\bar{q}_y = q_y + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} = 0$

Zápis v posunutích např. pro $x = konst.$

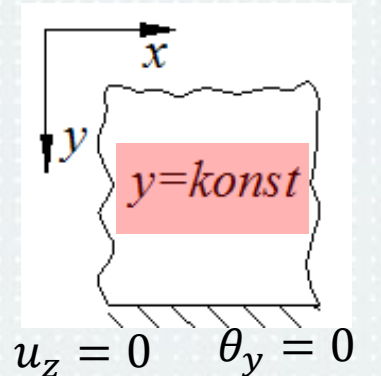
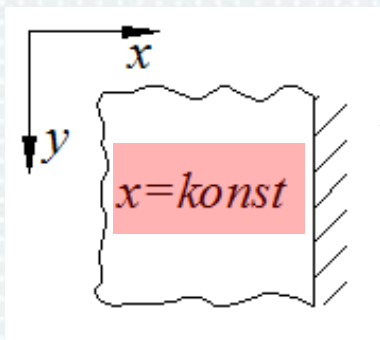
$\frac{\partial^3 u_z}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 u_z}{\partial x \partial y^2} = 0$

c) Vetknutý okraj

V teorii tenkých desek platí, že pootočení

$\theta_x = \frac{\partial u_z}{\partial y}$ a $\theta_y = \frac{\partial u_z}{\partial x}$

Tedy platí $\frac{\partial u_z}{\partial y} = 0$ a $\frac{\partial u_z}{\partial x} = 0$



Silové podmínky: $x = konst. \rightarrow u_z = \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} = 0$ $y = konst. \rightarrow u_z = \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} = 0$

$m_x = -D \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}, \quad m_y = -D\nu \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} = \nu m_x$

$m_y = -D \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2}, \quad m_x = -D\nu \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} = \nu m_y$

2 Reissner-Mindlinův model desek – teorie středně tlustých desek

Model je analogický Timošenkovu prutu (nosníku). Model zahrnuje příčné smykové deformace.

Kinematika

Podle obrázků je $\beta_x(x, y)$ a $\beta_y(x, y)$ jsou úhly charakterizující potočení přímk, které byly původně kolmé (ortogonální) ke střednicové ploše. Za předpokladu $u_z = u_z(x, y)$ podle obrázků

$$u_x = -\beta_x(x, y)z,$$

$$u_y = -\beta_y(x, y)z.$$

Funkce $u_z(x, y)$, $\beta_x(x, y)$ a $\beta_y(x, y)$ (vztažené ke střednicové ploše) jsou tři nezávislé stupně volnosti charakterizující pole posunutí.

Geometricko-deformační vztahy

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} = -z \frac{\partial \beta_x}{\partial x},$$

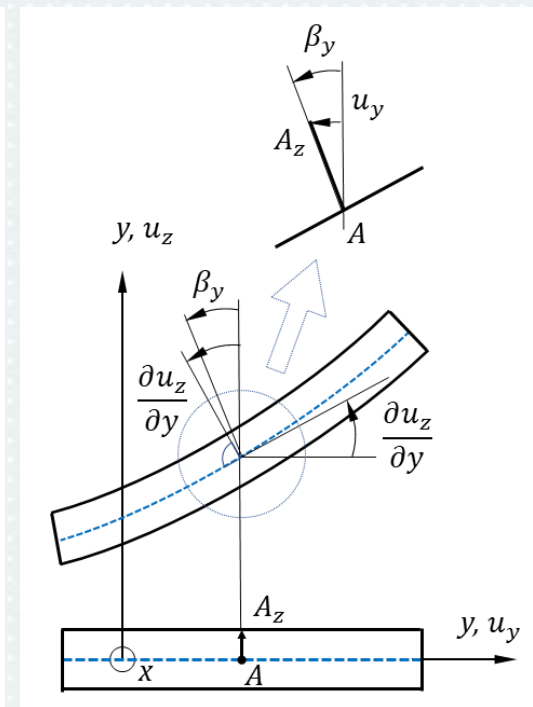
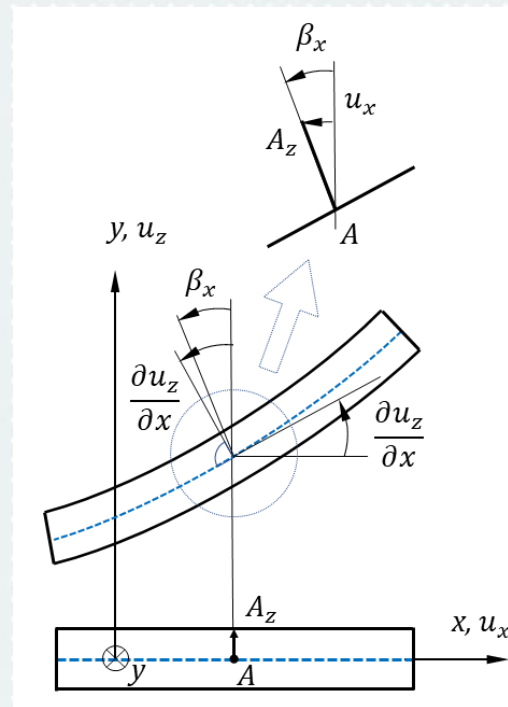
$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} = -z \frac{\partial \beta_y}{\partial y},$$

$$\varepsilon_{zz} = 0, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = -z \left(\frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \right),$$

(119)

$$\varepsilon_{zx} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} = \frac{\partial u_z}{\partial x} - \beta_x,$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} = \frac{\partial u_z}{\partial y} - \beta_y.$$



Konstitutivní (fyzikální) vztahy

Stejná hypotéza jako u tenkých desek o vrstvě s vlastnostmi rovinné napjatosti

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \frac{E}{(1-\nu^2)} (\varepsilon_{xx} + \nu \varepsilon_{yy}) = \frac{Ez}{(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial \beta_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \right), \\ \sigma_{yy} &= \frac{E}{(1-\nu^2)} (\varepsilon_{yy} + \nu \varepsilon_{xx}) = \frac{Ez}{(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial \beta_y}{\partial y} + \nu \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \right), \\ \sigma_{xy} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \varepsilon_{xy} = -\frac{Ez}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \right).\end{aligned}\tag{120a}$$

Dále pro příčný smyk lze použít zobecněný Hookův zákon

$$\begin{aligned}\sigma_{xz} &= G\varepsilon_{xz} = G \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} - \beta_x \right) = \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} - \beta_x \right) \\ \sigma_{yz} &= G\varepsilon_{yz} = G \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \beta_y \right) = \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \beta_y \right)\end{aligned}\tag{120b}$$

Výslednice vnitřních sil

Vnitřní síly jsou stejné jako u Kirchhoffova modelu desek

$$\begin{aligned}m_x &= D \left(\frac{\partial \beta_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \right), \quad m_y = D \left(\frac{\partial \beta_y}{\partial y} + \nu \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \right), \quad m_{xy} = m_{yx} = D \left(\frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \right), \\ q_x &= \kappa GA \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} - \beta_x \right), \quad q_y = \kappa GA \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \beta_y \right), \quad \kappa \text{ je korekční smykový součinitel.}\end{aligned}\tag{121}$$

Obdobně jako u prutu je u desek smykový korekční faktor κ , poměr smykové plochy vůči skutečné ploše průřezu $\kappa = \frac{A_s}{A}$. U obdélníka $\kappa = 5/6$ pro izotropní materiál.

Podmínky rovnováhy

Podmínky rovnováhy tytéž jako u Kirchhoffového modelu desky.

Okrajové podmínky

Opět je třeba rozlišovat prosté podepření, volný okraj a vetknutí.

Hlavní momenty

Při dimenzování speciálně železobetonových desek je nutno určit tzv. hlavní momenty m_I a m_{II} ($m_{xy} = 0$).

$$m_{I,II} = \frac{1}{2} \left[m_x + m_y \pm \sqrt{(m_x - m_y)^2 + 4m_{xy}^2} \right] \quad (122)$$

Polohy normál k hlavním rovinám:

$$\operatorname{tg} \varphi_I = \frac{m_I - m_x}{m_{xy}} = \frac{m_{xy}}{m_I - m_y} \quad (123)$$

Extrémní hodnoty kroutícího momentu
– v řezech půlících úhel hlavních rovin

$$m_{xy}^{extr} = \pm \frac{1}{2} (m_I - m_{II}) \quad (124)$$

Skořepiny

Skořepinami se rozumí nosné plošné konstrukce staveb, zakřivené nebo zalomené v jednom popřípadě v obou směrech. Základní charakteristikou skořepiny (tak, jako u desek) je, že jeden její rozměr – tloušťka je výrazně menší než zbývající rozměry. Skořepiny dělíme do tří skupin, a to podle jejich statického chování, které předurčuje použití výchozí teorie. Je vhodné zavést pojem střední tloušťka skořepiny t_{avr} a střední poloměr křivosti střednicové plochy r_{avr} .

Velmi tenké skořepiny – kovové zásobníky, velkorozměrové nádrže z oceli, venkovní kovová potrubí velkých průřezů, vysoké kovové komíny,...

$$\frac{t_{avr}}{r_{avr}} = \frac{1}{400} \div \frac{1}{600}$$

Tenké skořepiny – železobetonové skořepiny, železobetonové pláště chladicích věží, vysoké železobetonové komíny, velkorozměrové železobetonové nádrže, venkovní železobetonové velkopřůměrová potrubí,...

$$\frac{t_{avr}}{r_{avr}} = \frac{1}{50} \div \frac{1}{200}$$

Tlusté skořepiny – nádrže železobetonových vodojemů, tlakové železobetonové potrubí, klenbové železobetonové přehradní nádrže, opěrné zdi vyklenuté proti zemině,

$$\frac{t_{avr}}{r_{avr}} = \frac{1}{20} \div \frac{1}{30}$$

Základem teorie skořepin je teorie **tenkých skořepin**, a to z těchto důvodů:

- a) Vyšetřování velmi tenkých skořepin je vždy velmi specifické, závislé na geometrickém tvaru skořepiny, vychází z teorie tenkých skořepin
- b) Vyšetřování tlustých skořepin je složitější než vyšetřování tenkých skořepin, proto se obchází různými jednoduššími teoriemi

Při navrhování skořepin usilujeme o to, aby hlavní část zatížení **spojitě působila v kolmých směrech na střednicovou plochu**. Podaří-li se to, potom skořepina přenáší vnější zatížení do podpor především normálovými silami a je málo namáhaná ohybově. Toto se daří zejména u nízkých střešních bání, které se chovají jako prostorový oblouk.

Všeobecná teorie staticky namáhaných tenkých skořepin je vypracována ve třech variantách seřazených podle úrovně modelování a tedy i podle obtížnosti.

Přesná ohybová teorie

Technická ohybová teorie

Membránová teorie

Nejjednodušší teorie je membránová, kterou lze použít jen vzácně, a to u skořepin s převládajícími stěnovými vnitřními silami. Vyšetřujeme-li statické stavy navržené konkrétní tenké skořepiny za použití přesné ohybové teorie nebo technické ohybové teorie, potom je nutno tuto všeobecnou teorii konkretizovat podle tvaru střednicové plochy a podle způsobu podepření. Je to vždy velmi nesnadná a mnohdy neřešitelná úloha. Teoretické vyšetřování tenkých skořepin je matematicky velmi náročné.

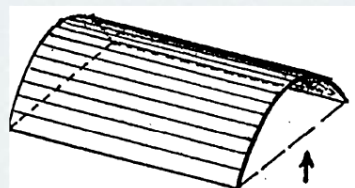
Stejně jako u stěn a desek je klíčem ke stanovení jejich statických stavů stěnová a desková rovnice. Obě tyto rovnice jsou sestavovány z příslušných podmínek statických, geometrických a fyzikálních. Obdobně v případě tenkých skořepin jsou tři simultánní parciální diferenciální rovnice 3. a 4. řádu pro složky přemístění střednicové plochy u_x , u_y a u_z . Také tyto rovnice se sestavují z podmínek, statických, geometrických a fyzikálních. Přitom geometrické podmínky se u tenkých skořepin odvozují velmi nesnadno, přičemž se mění s funkcí geometrie střednicové plochy.

Tenké stavební skořepiny

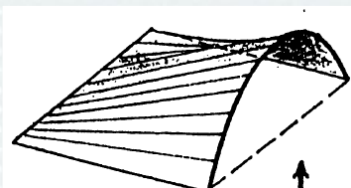
- Střednicová plocha – zcela hladká (spojitost v bodě včetně první derivace)
po částech hladká
- Skořepiny – s jednou křivostí
se dvojí křivostí

Významnou skupinu tvoří rotační skořepiny, které mohou mít jednu a dvojí křivost. Další skupinu tvoří tzv. lomenice s nulovou křivostí neboť jsou sestaveny ze stěnodesek.

Příklady používaných tenkých skořepin



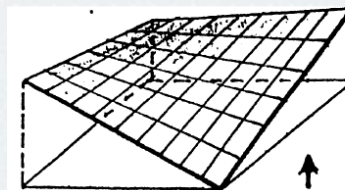
Dlouhá střešní válcová skořepina – jedna křivost



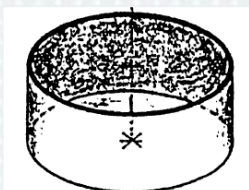
Střešní konoidická skořepina – dvojí křivost



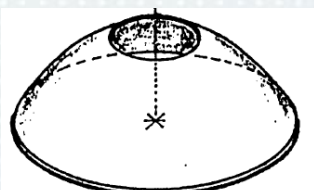
Prefabrikovaný díl střešní
Skořepiny do rozponu 25 m
hyperbolický paraboloid
– dvojí křivost



Střešní hyperbolicko-
parabolická skořepina
– dvojí křivost

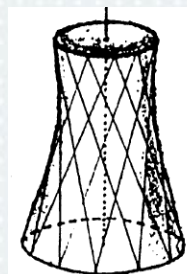


Rotační válcová skořepina – jedna křivost

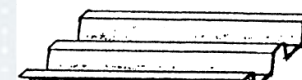


Rotační báně
– dvojí křivost

Jednodílný
hyperboloid
– dvojí křivost



Lomená skořepina –
lomenice – nulová křivost



Křivky nejběžnějších hladkých ploch



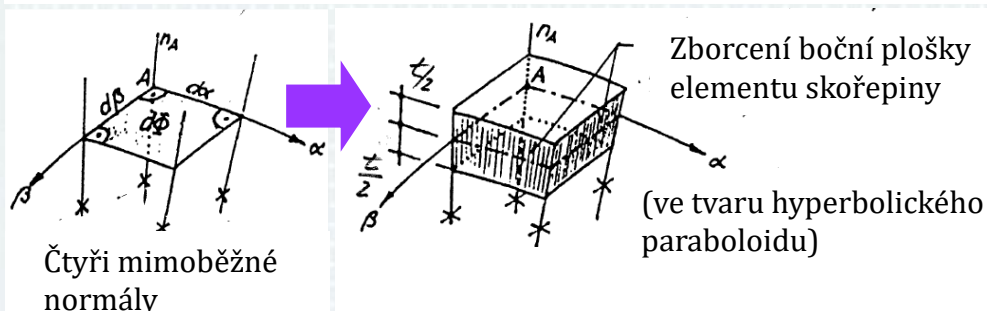
- Válcové plochy
- Rotační kuželová plocha
- Kulová plocha
- Plocha jednodílného rotačního hyperboloidu
- Plocha konoidu

Přesná ohybová teorie pro vyšetřování plných tenkých skořepin

Výchozí předpoklady

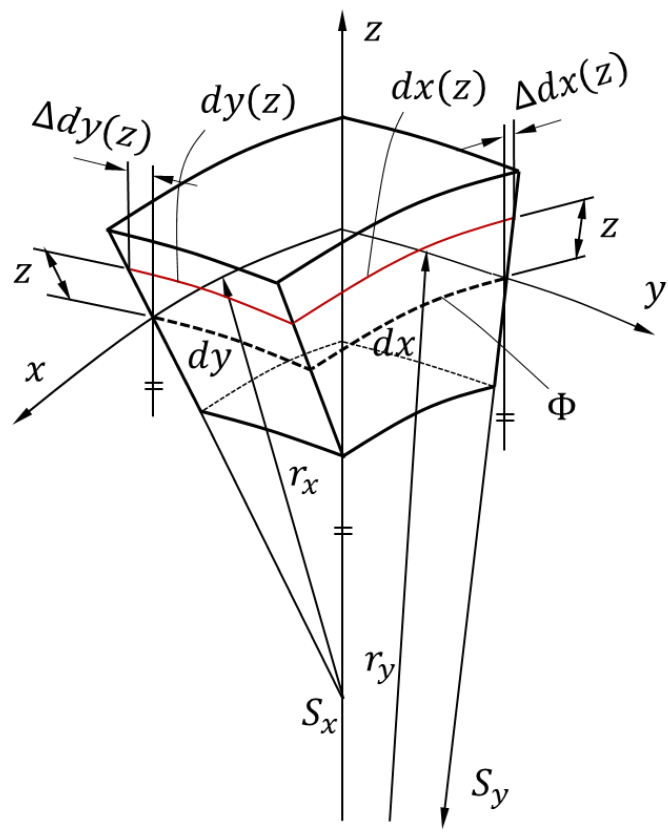
1. Materiál skořepiny je homogenní, izotropní a lineárně pružný.
2. Normáloví napětí v kolmých směrech na střednicovou plochu jsou ve srovnání s normálovým napětím ve zbývajících směrech natolik malá, že je považujeme za nulová.
3. Předpokládá se platnost rozšířené Navierovy – Bernoulliho hypotézy. Normály střednicové plochy zůstávají normálami i po jejím přetvoření, přičemž vzdálenosti bodů na normálách od střednicové plochy se nemění.
4. Předpokládají se natolik malá přetvoření skořepiny, že lze vycházet z teorie I. řádu.

Geometrie diferenciálního elementu skořepiny



V důsledku mimoběžnosti normál nejsou boční plošky diferenciál elementu rovinné. Jedině z takových elementů lze sestavit v obecných směrech $\alpha \perp \beta$ kompatibilně uvažovanou skořepinu.

V případě, že ortogonální souřadnice (α, β) jsou hlavními křivkami plochy Φ , platí $(\alpha, \beta) \equiv (\alpha_I, \alpha_{II})$. Potom normály v rozích diferenciálního elementu $d\Phi = dxdy$ se provádí po párech $(\alpha_I \equiv x, \alpha_{II} \equiv y)$.



Při konečných poloměrech křivosti r_x, r_y závisí délky dx, dy u diferenciálního elementu skořepiny na vzdálenosti od střednicové plochy Φ , tedy na souřadnici z .

Potom platí $dx(z) = dx + \Delta dx(z)$,
 $dy(z) = dy + \Delta dy(z)$.

Z geometrie elementu plyne:

$$\Delta dx(z) = \frac{dx}{r_x} z \quad \text{a} \quad \Delta dy(z) = \frac{dy}{r_y} z.$$

Po dosazení

$$dx(z) = dx \left(1 + \frac{z}{r_x} \right)$$

a

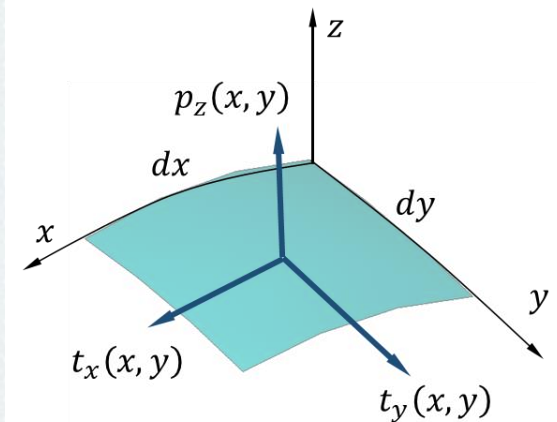
$$dy(z) = dy \left(1 + \frac{z}{r_y} \right)$$

(125)

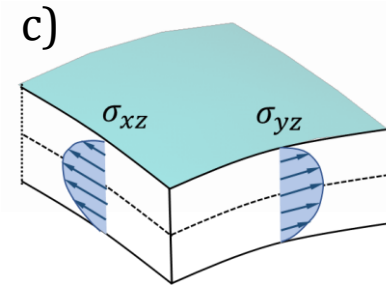
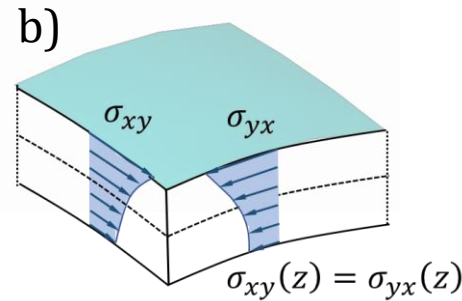
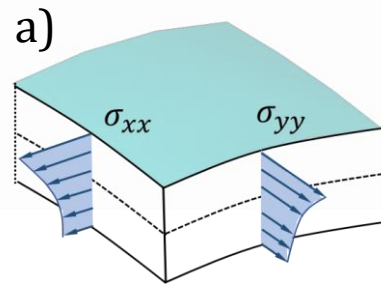
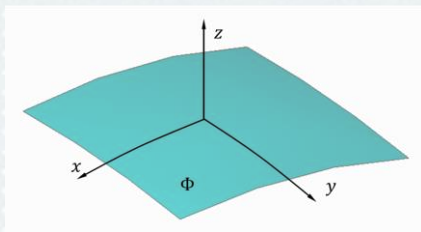
Zatížení skořepin

Na skořepiny by neměly působit koncentrované statické účinky. Silová zatížení obecného směru rozkládáme ve střednicové rovině do směrů x, y, z .

Intenzity
zatížení



Rozdělení napětí na elementárním prvku skořepiny



Vnitřní síly skořepiny

1. Integrací normálového napětí σ_{xx}, σ_{yy} získáme normálové síly n_x, n_y . Přemístěním n_x, n_y do Φ získáme ohybové momenty m_x, m_y .
2. Integrací smykového napětí σ_{xy}, σ_{yx} získáme tangenciální síly n_{xy}, n_{yx} . Jejich přemístěním do Φ získáme kroutící momenty m_{xy}, m_{yx} . Protože $r_x \neq r_y$, pak $n_{xy} \neq n_{yx}$ a $m_{xy} \neq m_{yx}$.
3. Integrací smykového napětí σ_{xz}, σ_{zx} získáme posouvající síly t_x, t_y .

1.

Normálové síly

[N.m⁻¹]

(126a)

$$n_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{xx} \left(1 + \frac{z}{r_y} \right) dz$$

a

$$n_y = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{yy} \left(1 + \frac{z}{r_x} \right) dz$$

Ohybové momenty

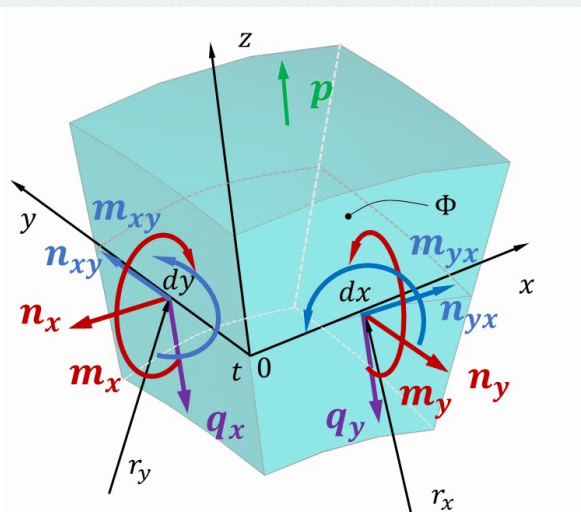
[N]

(126b)

$$m_x = - \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{xx} z \left(1 + \frac{z}{r_y} \right) dz$$

a

$$m_y = - \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{yy} z \left(1 + \frac{z}{r_x} \right) dz$$



2.

Tangenciální síly

[N.m⁻¹]

$$n_{xy} = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{xy} \left(1 + \frac{z}{r_y} \right) dz$$

(126c)

a

$$n_{yx} = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{yx} \left(1 + \frac{z}{r_x} \right) dz$$

Kroutící momenty

[N]

$$m_{xy} = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{xy} z \left(1 + \frac{z}{r_x} \right) dz$$

(126d)

a

$$m_{yx} = - \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{yx} z \left(1 + \frac{z}{r_y} \right) dz$$

3.

Posouvající síly

[N.m⁻¹]

$$t_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{xz} \left(1 + \frac{z}{r_y} \right) dz$$

(126e)

a

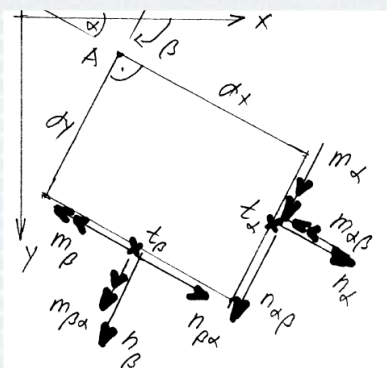
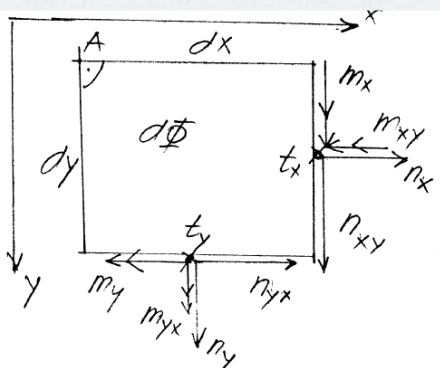
$$t_y = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{zx} \left(1 + \frac{z}{r_x} \right) dz$$

Napjatost skořepiny v jejím obecném bodě je popsána 10 vnitřními silami:

Stěnové síly – n_x, n_y, n_{xy}, n_{yx}

Deskové síly – $m_x, m_y, m_{xy}, m_{yx}, t_x, t_y$

Transformace napjatosti v obecném bodě skořepiny:



$$\begin{aligned} n_\alpha &= n_x \cos^2 \alpha + n_y \sin^2 \alpha + (n_{xy} + n_{yx}) \sin \alpha \cos \alpha \\ n_\beta &= \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ \vdots & \quad \quad \quad \vdots \\ m_{\beta\alpha} &= -m_{xy} \sin^2 \alpha + m_{yx} \cos^2 \alpha - (m_x - m_y) \sin \alpha \cos \alpha \\ t_\alpha &= t_x \cos \alpha + t_y \sin \alpha \\ t_\beta &= -t_x \sin \alpha + t_y \cos \alpha \end{aligned} \quad (127)$$

Přemístění skořepiny je popsáno funkcemi:

$u_x, u_y, u_z.$

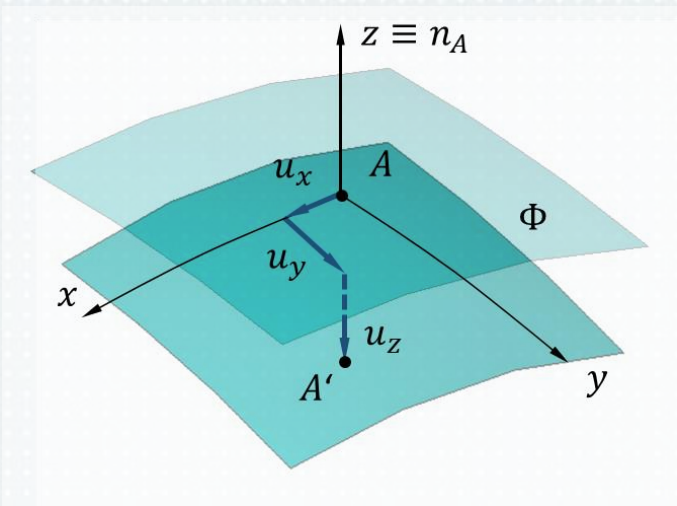
Základní rovnice plných tenkých skořepin

$$\mathcal{D}_1^{(3)}[u_x(x,y), u_y(x,y), u_z(x,y)] = -D_1 \bar{t}_x(x,y),$$

$$\mathcal{D}_2^{(3)}[u_x(x,y), u_y(x,y), u_z(x,y)] = -D_2 \bar{t}_y(x,y),$$

$$\mathcal{D}_3^{(3)}[u_x(x,y), u_y(x,y), u_z(x,y)] = +D_3 \bar{n}_z(x,y).$$

složité parciální diferenciální rovnice + okrajové podmínky



Technická ohybová teorie skořepin:

1. $t/r \approx 0$ – geometrický předpoklad

➡

$n_{xy} = n_{yx}$ a $m_{xy} = m_{yx}$

Potom napjatost skořepiny v jejím obecném bodě je popsána 8 vnitřními silami

2. $\nu \approx 0$ – fyzikální předpoklad

Sestavení matic tuhosti konečného prvku pro řešení obecných zakřivených skořepin je značně komplikované. Uvádí se pouze zjednodušené řešení skořepiny aproximované stěnodeskovými konečnými prvky.

Potenciální energie deformace vnějších sil a vnitřních sil při prostorové napjatosti 7

Deformace tělesa je způsobena silami nebo jinými faktory např. změna teploty tělesa.

- Síly objemové – síly funkcí hmotnosti uzavřené v určitém geometrickém objemu
- Síly povrchové – síly vznikající při kontaktu těles

Kontinuum ideálně pružné – po odtížení se vrací do původní polohy.

Statické zatížení tělesa – od nuly do konečné hodnoty relativně pomalu.

Konzervativní mechanický systém – platí zákon o zachování mechanické energie.

Při deformačním (přetvárném) procesu konají vnější i vnitřní síly mechanickou práci.

Mechanická práce ve spojení s potenciální energií

$$V_2 - V_1 = - \int_{S_1}^{S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

kde V_1 a V_2 jsou hodnoty potenciální energie odpovídajícím bodům S_1 a S_2 v prostoru, $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ je skalární součin vektoru Síly $\mathbf{F}$ a diferenciálu polohového vektoru $d\mathbf{r}$. (128)

Jinak změna potenciální energie $\Delta V = V_2 - V_1$ je rovna negativní hodnotě mechanické práce $A = \int_{S_1}^{S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ síly $\mathbf{F}$ potenciálního silového pole na libovolné dráze mezi jeho dvěma body S_1 a S_2 .

$$\Delta V = -A. \quad (129)$$

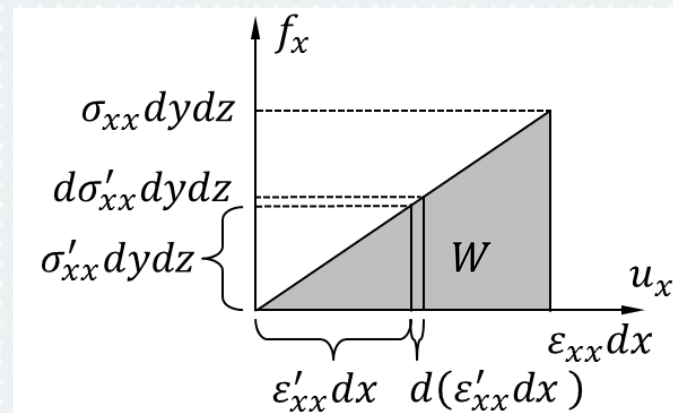
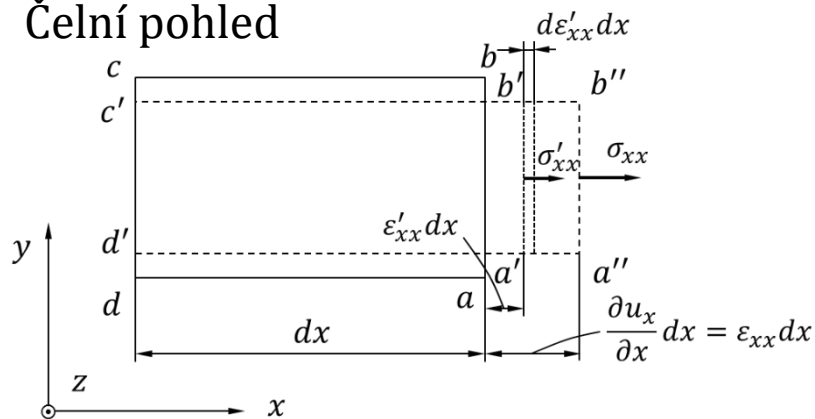
Vzhledem k uvedeným závislostem může být definována i potenciální energie vnějších i vnitřních sil. Abychom její hodnotu jednoznačně určili musíme stanovit pro ni **srovnávací stav**. Za tento srovnávací (výchozí, referenční) stav volíme **nedeformovaný stav tělesa**, stejně pro vnější i vnitřní síly.

Potenciální energie (přetvoření) deformace vnitřních sil

Po zdeformování (přetvoření) tělesa se v tělese akumuluje energie – deformační (přetvárná) energie

Šestistěn namáhaný prostým tahem

Čelní pohled



Elementární práce mezilehlé vnější síly ($\sigma'_{xx} dydz$) na posunutí ($d\epsilon'_{xx} dx$) je rovna ($\sigma'_{xx} d\epsilon'_{xx} dx dydz$).

Celková práce lineárně narůstající síly

$$dL = \int_{\epsilon'_{xx}=0}^{\epsilon_{xx}} \sigma'_{xx} d\epsilon'_{xx} dx dydz = dU$$

V případě lineárně pružného izotropního materiálu při prostém tahu platí

$$dU = E dx dydz \int_0^{\epsilon_{xx}} \epsilon'_{xx} d\epsilon'_{xx} = \frac{1}{2} E \epsilon_{xx}^2 dx dydz = \frac{1}{2} \sigma_{xx} \epsilon_{xx} dx dydz.$$

Poznámka: dL je deformační práce vnějších sil a dU odpovídá nárůstu energie deformace elementárního hranolu o rozměrech dx , dy a dz .

Dá se definovat jako plocha pod diagramem křivky napětí-deformace.

Celková práce lineárně narůstajícího přetvoření

$$dL = \int_{\sigma'_{xx}=0}^{\sigma_{xx}} \epsilon'_{xx} d\sigma'_{xx} dx dydz = dU.$$

V případě lineárně pružného izotropního materiálu při prostém tahu platí

$$dU^* = \frac{1}{E} dx dy dz \int_0^{\sigma_{xx}} \sigma'_{xx} d\sigma'_{xx} = \frac{1}{2E} \sigma_{xx}^2 dx dy dz = \frac{1}{2} \sigma_{xx} \varepsilon_{xx} dx dy dz.$$

Zavedeme pojem – **intenzita (hustota) energie deformace** označenou symbolem W^d .

Poměrná energie deformace W^d je energie vztažena na jednotku objemu.

Dá se definovat jako plocha pod diagramem křivky napětí-deformace.

Pro uvedený materiál při jednoduchém tahu platí

$$W^d = \frac{1}{2} \sigma_{xx} \varepsilon_{xx} = \frac{1}{2} E \varepsilon_{xx}^2.$$

V případě působení na šestistěn smykového napětí σ_{xy}

a σ_{xy} je smyková deformace ε'_{xy} úměrná smykovému

napětí – neboť platí Hookův zákon pro smyk $\sigma_{xy} = G \varepsilon_{xy}$.

Potom energie deformace od smyku

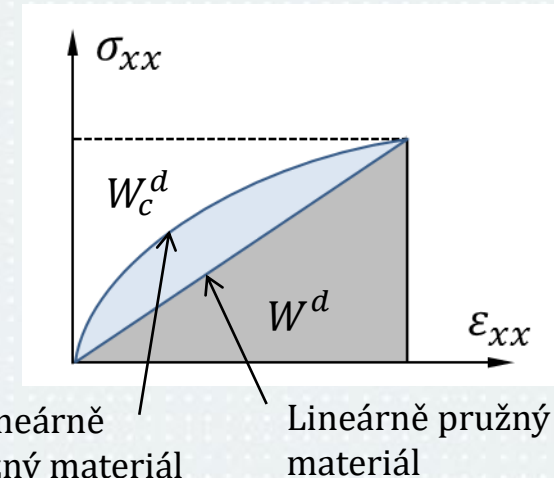
$$W^d = \frac{1}{2} \sigma_{xy} \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} G \varepsilon_{xy}^2.$$

Analogicky se tvoří i výrazy pro energii ostatních složek napětí.

V případě prostorového stavu napětí lineárně pružného izotropního materiálu

$$2W^d = \sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \sigma_{yy}\varepsilon_{yy} + \sigma_{zz}\varepsilon_{yy} + \sigma_{xy}\varepsilon_{xy} + \sigma_{yz}\varepsilon_{yz} + \sigma_{zx}\varepsilon_{yx}. \quad (130)$$

Plocha nad diagramem křivky napětí-deformace je poměrná komplementární (doplňková) energie deformace značená W_c^d .



V případě lineárně pružného izotropního materiálu výraz v deformacích (přetvořeních)

$$W^d = W^d(\varepsilon) = \frac{1}{2} \left[\lambda e^2 + 2G(\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{yy}^2 + \varepsilon_{zz}^2) + G(\varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{yz}^2 + \varepsilon_{zx}^2) \right], \quad (131)$$

kde $\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ Laméova konstanta a $e = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}$ I. invar. deformace.

V případě lineárně pružného izotropního materiálu výraz v napětích

$$\begin{aligned} W_c^d &= W_c^d(\sigma) \\ &= \frac{1}{2E} (\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{zz}^2) - 2\frac{\nu}{E} (\sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{yy}\sigma_{zz} + \sigma_{zz}\sigma_{xx}) + \frac{1}{2G} (\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2). \end{aligned} \quad (132)$$

Oba výše uvedené vztahy můžeme zapsat maticově

$$W^d = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} \quad \text{a} \quad W_c^d = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{D}^{-1} \boldsymbol{\sigma}. \quad (113)$$

Celková energie deformovaného tělesa o objemu V je rovna integrálu poměrných energií

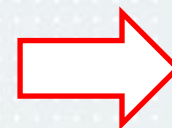
$$U = \iiint_V W^d dV \quad \text{a} \quad U_c = \iiint_V W_c^d dV. \quad (134)$$

Pro lineárně pružný materiál se energie deformace U a U_c rovnají ($W^d = W_c^d$).

Lze ukázat,
že platí:

$$\frac{\partial W_c^d(\sigma)}{\partial \sigma_{xx}} = \frac{\sigma_{xx}}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{yy} + \sigma_{zz}) = \varepsilon_{xx},$$

$$\frac{\partial W_c^d(\sigma)}{\partial \sigma_{xy}} = \varepsilon_{xy} \quad \text{atd. a naopak}$$



$$\frac{\partial W_c^d(\sigma)}{\partial \sigma_{ij}} = \varepsilon_{ij},$$

$$\frac{\partial W^d(\varepsilon)}{\partial \varepsilon_{ij}} = \sigma_{ij}.$$

(135)

Potenciální energie (přetvoření) deformace vnějších sil

Při deformačním procesu existují dvě duální formy potenciální energie vnějších sil.

Na povrchu tělesa dvě oblasti S_p a S_u navzájem disjunktní.

Na oblasti (hranici) S_p jsou předepsány silové faktory.

Na oblasti S_u (hranici) jsou předepsány posunutí a pootočení.

$S = S_p + S_u$, kde S je povrch tělesa.

Předpokládejme, že vnější i objemové síly jsou spojitě rozloženy po objemu V a povrchu S .

Na části hranice S_p je předepsáno zatížení $\mathbf{p} = \begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{Bmatrix}$ a na objem V_p nechť působí

objemové síly $\mathbf{X} = \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix}$.

Potenciální energie vnějších sil

$$L = - \iiint_{V_p} (\bar{X}u_x + \bar{Y}u_x + \bar{Z}u_z)dV - \iint_{S_p} (\bar{p}_xu_x + \bar{p}_yu_y + \bar{p}_zu_z)dS.$$

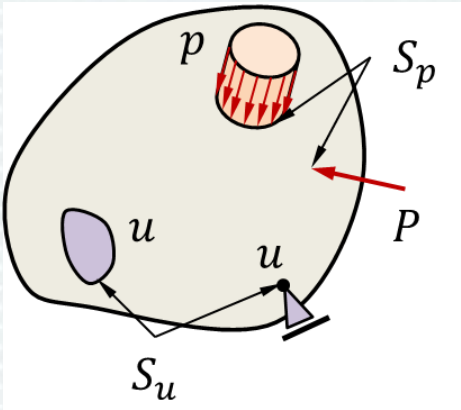
(136)

Na části hranice S_u jsou předepsány posunutí $\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix}$ a na objem V_u nechť jsou rovněž předepsány posunutí $\mathbf{u}$.

Doplňková potenciální energie vnějších sil

$$L_c = - \iiint_{V_u} (X\bar{u}_x + Y\bar{u}_y + Z\bar{u}_z)dV - \iint_{S_u} (p_x\bar{u}_x + p_y\bar{u}_y + p_z\bar{u}_z)dS.$$

(137)



Příklad: Tenký ohýbaný prut

$$\varepsilon_{xx} = -y u_y'',$$

Ze základní pružnosti platí

$$\sigma_{xx} = \frac{M_z}{I_z} y,$$

kde u_y'' je křivost ohybové čáry.

kde M_z je ohybový moment a I_z moment setrvačnosti.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_{xx}, \boldsymbol{\sigma} = \sigma_{xx} \text{ a } \mathbf{D} = E.$$

$$\begin{aligned} U &= \iiint_V \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} dV = \iiint_V \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} dV = \\ &= \iiint_V \frac{E}{2} \varepsilon_{xx}^2 dx dy dz = \\ &= \frac{E}{2} \int_0^l (u_y'')^2 dx \iint_{A(x)} y^2 dy dz = \\ &= \frac{E}{2} \int_0^l I_z(x) [u_y''(x)]^2 dx. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_c &= \int_V \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \int_V \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{D}^{-1} \boldsymbol{\sigma} dV = \\ &= \iiint_V \frac{1}{E} \sigma_{xx}^2 dx dy dz = \\ &= \frac{1}{2E} \int_0^l \left(\frac{M_z}{I_z} \right)^2 dx \iint_{A(x)} y^2 dy dz = \\ &= \frac{1}{2E} \int_0^l \frac{M_z^2(x)}{I_z(x)} dx. \end{aligned}$$

Odvoďte výraz pro celkovou potenciální energii soustavy

Energie deformace
ohýbaného nosníku

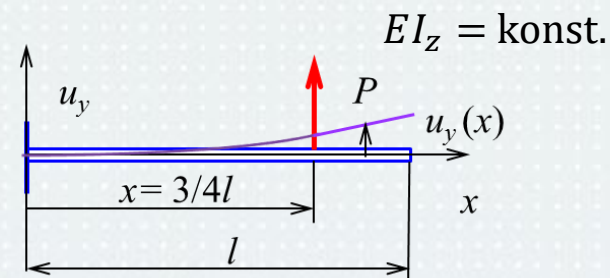
$$U = \frac{EI_z}{2} \int_0^l (u_y'')^2 dx$$

Potenciální energie
vnějších sil

$$L = -P u_y \left(x = \frac{3}{4} l \right)$$

Práce vnějších sil

Celková energie soustavy



$$\Pi = \frac{EI_z}{2} \int_0^l (u_y''(x))^2 dx - P u_y \left(x = \frac{3}{4} l \right)$$

Energie soustavy

Potenciální energie soustavy – P.E.S.

P.E.S. se také nazývá celková potenciální energie

Považujeme-li těleso s jeho vnitřními i vnějšími silami za uzavřenou soustavu, můžeme definovat celkovou potenciální energii soustavy Π

$$\Pi = L + U, \quad (138)$$

kde U potenciální energie deformace,

$$U = \iiint_V W^d(\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{yz}, \varepsilon_{zx}) dV,$$

kde L potenciální energie vnějších sil

$$L = - \iiint_{V_p} (\bar{X}u_x + \bar{Y}u_y + \bar{Z}u_z) dV - \iint_{S_p} (\bar{p}_xu_x + \bar{p}_yu_y + \bar{p}_zu_z) dS.$$

Pruh nad objemovými a povrchovými silami znamená, že tyto síly jsou zadané. Povrchové síly na části S_p povrchu jsou zadané (známé).

$$W^d(u_x, u_y, u_z) = \frac{Ev}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 + \quad (139)$$
$$G \left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{G}{2} \left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right)^2 \right] \geq 0$$

Celková potenciální energie $\Pi(u_x, u_y, u_z)$ při pevně zadaných vnějších silách je funkcí pouze tří proměnných.

K.E.S. se také nazývá celková doplňková energie

$$\Pi_c = U_c + L_c, \quad (140)$$

kde U_c doplňková energie deformace,

$$U_c = \iiint_V W_c^d(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{yz}, \sigma_{zy}) dV,$$

kde L_c doplňková energie vnějších povrchových sil na S_u a objemových sil na V_u

$$L_c = - \iiint_{V_u} (X\bar{u}_x + Y\bar{u}_y + Z\bar{u}_z) dV - \iint_{S_u} (p_x\bar{u}_x + p_y\bar{u}_y + p_z\bar{u}_z) dS.$$

Pruhy označují, že na části povrchu S_u a části objemu V_u jsou zadána přemístění.

Pro lineárně pružnou látku platí

$$W_c^d = W_c^d(\sigma) = \frac{1}{2E} \left[(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})^2 + 2(1 + \nu)(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2 - \sigma_{xx}\sigma_{yy} - \sigma_{yy}\sigma_{zz} - \sigma_{zz}\sigma_{xx}) \right] \geq 0 \quad (141)$$

Povrchová napětí p_x , p_y a p_z lze vyjádřit pomocí složek napětí.

Potom celková doplňková energie $\Pi_c(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{yz}, \sigma_{zy})$ bude vyjádřena jako funkce 6 složek tenzoru napětí.

Funkcionál a jeho variace

Funkcionál je funkce - definiční obor je množina funkcí, obor hodnot je množina reálných (komplexních) čísel.

Například funkce energií $U(u_x, u_y, u_z)$, $L(u_x, u_y, u_z)$, $\Pi(u_x, u_y, u_z)$ a $\Pi_c(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \dots, \sigma_{zx})$.

Funkcionál $L(u_x, u_y, u_z)$ je lineární - funkce $u_x(x, y, z)$, $u_y(x, y, z)$, $u_z(x, y, z)$ vystupují v první mocnině. Funkcionál $U(u_x, u_y, u_z)$ je příklad kvadratického funkcionálu.

Integrand $W^d(\varepsilon) = \frac{1}{2} [\lambda \varepsilon^2 + 2G(\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{yy}^2 + \varepsilon_{zz}^2) + G(\varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{yz}^2 + \varepsilon_{zx}^2)]$.

Funkcionál $L(u_x, u_y, u_z)$ je definován na množině funkcí posunutí $u_x(x, y, z)$, $u_y(x, y, z)$, $u_z(x, y, z)$, spojitých na V a S až do jejich třetích derivací plnící předepsané kinematické (geometrické podmínky na S_u).

Protože $L(u_x, u_y, u_z)$ je určitý integrál potom trojice funkcí u_x^0, u_y^0, u_z^0 z definičního oboru se zobrazí do jediného bodu R_0 na ose reálných čísel. R_0 je hodnota potenciální energie vnějších sil odpovídající hodnotám u_x^0, u_y^0, u_z^0 . Pro jinou trojici u_x^1, u_y^1, u_z^1 máme R_1 .

Pro dvě trojice funkcí u_x^1, u_y^1, u_z^1 (zobrazení $L \rightarrow R_1$) a u_x^0, u_y^0, u_z^0 (zobrazení $L \rightarrow R_0$)

Rozdíly $u_x^1(x, y, z) - u_x^0(x, y, z) = \delta u_x^0(x, y, z)$, $u_y^1(x, y, z) - u_y^0(x, y, z) = \delta u_y^0(x, y, z)$ a $u_z^1(x, y, z) - u_z^0(x, y, z) = \delta u_z^0(x, y, z)$ se nazývají variacemi funkcí u_x^0, u_y^0 a u_z^0 .

Rozdíl $L(u_x^1, u_y^1, u_z^1) - L(u_x^0, u_y^0, u_z^0) = \Delta L = R_1 - R_0$ se nazývá přírůstkem funkcionálu $L(u_x, u_y, u_z)$ v bodě u_x^0, u_y^0, u_z^0 na variacích $\delta u_x^0, \delta u_y^0$ a δu_z^0 .

Přírůstek funkcionálu – 1. variace $\delta L = \frac{\partial L}{\partial u_x} \delta u_x^0 + \frac{\partial L}{\partial u_y} \delta u_y^0 + \frac{\partial L}{\partial u_z} \delta u_z^0$

$$\delta L = - \iiint_{V_p} (\bar{X} \delta u_x^0 + \bar{Y} \delta u_y^0 + \bar{Z} \delta u_z^0) dV - \iint_{S_p} (\bar{p}_x \delta u_x^0 + \bar{p}_y \delta u_y^0 + \bar{p}_z \delta u_z^0) dS.$$

$$\Delta L = L(u_x^0 + \delta u_x^0, u_y^0 + \delta u_y^0, u_z^0 + \delta u_z^0) - L(u_x^0, u_y^0, u_z^0) = L(\delta u_x^0, \delta u_y^0, \delta u_z^0) = \delta L$$

Příkladem kvadratického funkcionálu je potenciální energie deformace

$$W^d(\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \dots, \varepsilon_{zx}) =$$

$$= G \left[\frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz})^2 + (\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{yy}^2 + \varepsilon_{zz}^2) + \frac{1}{2} (\varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{yz}^2 + \varepsilon_{zx}^2) \right] \geq 0.$$

$$\delta W^d = \frac{\partial W^d}{\partial \varepsilon_{xx}} \delta \varepsilon_{xx} + \dots + \frac{\partial W^d}{\partial \varepsilon_{zx}} \delta \varepsilon_{zx} = 2G \left[\frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) (\delta \varepsilon_{xx} + \delta \varepsilon_{yy} + \delta \varepsilon_{zz}) + \right. \\ \left. + (\varepsilon_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} \delta \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} \delta \varepsilon_{zz}) + \frac{1}{2} (\varepsilon_{xy} \delta \varepsilon_{xy} + \varepsilon_{yz} \delta \varepsilon_{yz} + \varepsilon_{zx} \delta \varepsilon_{zx}) \right].$$

$$\delta^2 W^d = \frac{1}{2} \delta(\delta W^d) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta W^d}{\partial \varepsilon_{xx}} \delta \varepsilon_{xx} + \dots + \frac{\partial \delta W^d}{\partial \varepsilon_{zx}} \delta \varepsilon_{zx} \right) = \left\{ G \frac{\nu}{1-2\nu} (\delta \varepsilon_{xx} + \delta \varepsilon_{yy} + \delta \varepsilon_{zz})^2 + \right. \\ \left. + [(\delta \varepsilon_{xx})^2 + (\delta \varepsilon_{yy})^2 + (\delta \varepsilon_{zz})^2] + \frac{1}{2} [(\delta \varepsilon_{xy})^2 + (\delta \varepsilon_{yz})^2 + (\delta \varepsilon_{zx})^2] \right\}.$$

Nakonec

$$\delta^2 W^d(\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \dots, \varepsilon_{zx}) = W^d(\delta \varepsilon_{xx}, \delta \varepsilon_{yy}, \dots, \delta \varepsilon_{zx}) \geq 0. \quad (142)$$

Druhá variace kladné kvadratické formy se rovná této formě na prvních variacích proměnných. Je vždy kladná a nulová pouze pro $\delta \varepsilon_{xx} = \delta \varepsilon_{yy} = \dots = \delta \varepsilon_{zx} = 0$.

Virtuální práce

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{u} \quad \text{síla a přemístění vzájemně příčinně souvisí} - \quad \text{skutečná práce} \quad (143)$$

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{u} \quad \text{práce skutečné síly na virtuálním přemístění} - \\ \delta \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} \quad \text{práce virtuální síly na skutečném přemístění} - \end{array} \right\} \quad \text{virtuální práce} \quad (144)$$

Virtuální přemístění – libovolné možné přemístění v mezích vnitřních a vnějších vazeb (omezení)

Virtuální síla – libovolná (povrchová nebo objemová) síla, která nezávisí na skutečném přemístění.

Virtuální napětí – $\delta\sigma_{xx}, \delta\sigma_{yy}, \dots$ musí plnit diferenciální rovnice rovnováhy a statické podmínky rovnováhy na S_p (staticky přípustné).

Princip virtuálních přemístění

Když se těleso nebo jeho libovolná část nachází v rovnováze, potom je virtuální práce všech skutečných vnějších a vnitřních sil na virtuálních přemístěních a přetvořeních (deformacích) rovna nule.

$$\begin{aligned} & \iiint_V \left[\left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + \bar{X} \right) \delta u_x + \left(\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + \bar{Y} \right) \delta u_y + \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \bar{Z} \right) \delta u_z \right] dV - \\ & - \iint_{S_p} [(p_x - \bar{p}_x) \delta u_x + (p_y - \bar{p}_y) \delta u_y + (p_z - \bar{p}_z) \delta u_z] dS = 0. \end{aligned} \quad (145)$$

Vzhledem k tomu, že $\delta u_x, \delta u_y$ a δu_z jsou libovolné hodnoty, potom výrazy v kulatých závorkách se musí rovnat nule – podmínky rovnováhy.

$$\begin{aligned} & \iiint_V (\bar{X}\delta u_x + \bar{Y}\delta u_y + \bar{Z}\delta u_z)dV - \iint_{S_p} (\bar{p}_x\delta u_x + \bar{p}_y\delta u_y + \bar{p}_z\delta u_z)dS + \\ & + \iiint_V (\sigma_{xx}\delta\varepsilon_{xx} + \sigma_{yy}\delta\varepsilon_{yy} + \sigma_{zz}\delta\varepsilon_{zz} + \sigma_{xy}\delta\varepsilon_{xy} + \sigma_{yz}\delta\varepsilon_{yz} + \sigma_{zx}\delta\varepsilon_{zx})dV = 0. \end{aligned} \quad (146)$$

Když virtuální práce vnějších a vnitřních sil na kinematicky přípustných virtuálních přemístěních je nulová, potom se těleso a i jeho libovolná část nachází v rovnováze.

Princip virtuálních přemístění se nazývá všeobecný princip rovnováhy.

Princip virtuálních sil

$$\begin{aligned} & \iiint_V (\varepsilon_{xx}\delta\sigma_{xx} + \varepsilon_{yy}\delta\sigma_{yy} + \varepsilon_{zz}\delta\sigma_{zz} + \varepsilon_{xy}\delta\sigma_{xy} + \varepsilon_{yz}\delta\sigma_{yz} + \varepsilon_{zx}\delta\sigma_{zx})dV - \\ & - \iiint_V (\bar{u}_x\delta X + \bar{u}_y\delta Y + \bar{u}_z\delta Z)dV - \iint_{S_p} (\bar{u}_x\delta p_x + \bar{u}_y\delta p_y + \bar{u}_z\delta p_z)dS = 0. \end{aligned} \quad (147)$$

Součet prací virtuálních vnějších a vnitřních sil na skutečných přemístěních a deformacích se rovná nule

Tento princip se také nazývá všeobecný princip geometrické spojitosti.

Klasické variační principy

Lagrangeho variační princip minima celkové potenciální energie soustavy

Vychází se z principu virtuálních přemístění

$$\iiint_V (\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} - \bar{X}_i \delta u_i) dV - \iint_{S_p} \bar{p}_i \delta u_i dS = 0, \quad i, j = x, y, z \quad \text{a} \quad \sigma_{ij} = \frac{\partial W^d(\varepsilon_{ij})}{\partial \varepsilon_{ij}}.$$

Potom
$$\iiint_V \frac{\partial W^d}{\partial \varepsilon_{ij}} \delta \varepsilon_{ij} dV - \iiint_V \bar{X}_i \delta u_i dV - \iint_{S_p} \bar{p}_i \delta u_i dS = 0$$

$$\underbrace{\iiint_V \frac{\partial W^d}{\partial \varepsilon_{ij}} \delta \varepsilon_{ij} dV}_{\delta U} - \underbrace{\iiint_V \bar{X}_i \delta u_i dV - \iint_{S_p} \bar{p}_i \delta u_i dS}_{\delta L} = 0$$

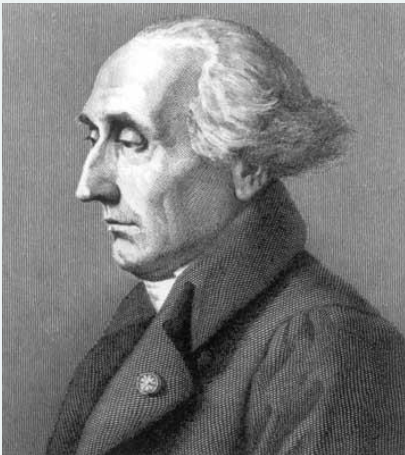
Tedy
$$\delta U + \delta L = \delta(U + L) = \delta \Pi = 0$$

$$\Pi(u_x + \delta u_x, u_y + \delta u_y, u_z + \delta u_z) = \Pi(u_x, u_y, u_z) + \underbrace{\delta \Pi(u_x, u_y, u_z)}_0 + \delta^2 \Pi(u_x, u_y, u_z), \quad \text{kde} \quad \delta^2 \Pi(u_x, u_y, u_z) = \delta^2 U + 0 \geq 0,$$

$$\text{Platí} \quad \Pi(u_x + \delta u_x, u_y + \delta u_y, u_z + \delta u_z) \geq \underbrace{\Pi(u_x, u_y, u_z)}_{\text{minimum}} \quad (148)$$

Věta o absolutním minimu potenciální energie

Ze všech kinematicky přípustných přemístění jedině skutečná přemístění (odpovídající rovnovážnému stavu) dávají potenciální energii soustavy minimální hodnotu



Joseph-Louis Lagrange
comte de l'Empire
1736 - 1813

Castiglianův princip minima komplementární energie soustavy

Vychází se z principu virtuálních sil

$$\iiint_V (\varepsilon_{ij} \delta \sigma_{ij}) dV - \iint_{S_u} \bar{u}_i \delta p_i dS = 0, \quad i, j = x, y, z \quad \text{a} \quad \varepsilon_{ij} = \frac{\partial W_c^d(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}}.$$

Potom
$$\iiint_V \frac{\partial W_c^d}{\partial \sigma_{ij}} \delta \sigma_{ij} dV - \iint_{S_u} \bar{u}_i \delta p_i dS = 0.$$

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{\partial W_c^d}{\partial \sigma_{ij}} \delta \sigma_{ij} dV & - \iint_{S_u} \bar{u}_i \delta p_i dS = \\ + \iiint_V \delta W_c^d dV = \delta U_c & - \delta \iint_{S_u} \bar{u}_i p_i dS = \delta L_c \end{aligned}$$

Tedy
$$\delta U_c + \delta L_c = \delta(U_c + L_c) = \delta \Pi_c = 0.$$

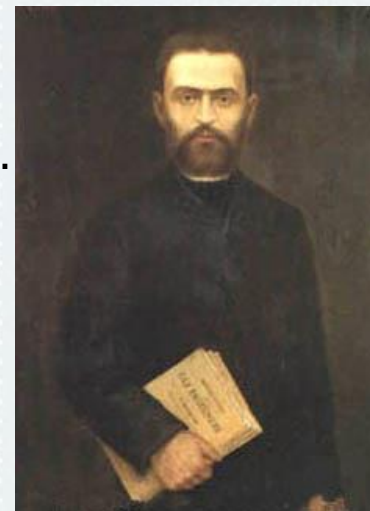
$$\delta \Pi_c(\sigma_{ij} + \delta \sigma_{ij}) = \Pi_c(\sigma_{ij}) + \delta \Pi_c(\sigma_{ij}) + \delta^2 \Pi_c(\sigma_{ij}) = 0, \text{ kde}$$

$$\delta \Pi_c = 0 \quad \text{a} \quad \delta^2 \Pi_c = \delta^2(U_c + L_c) = \delta^2 U_c + 0 \geq 0.$$

$$\Pi_c(\sigma_{ij} + \delta \sigma_{ij}) \geq \Pi_c(\sigma_{ij}) \quad \Rightarrow \quad \Pi_c(\sigma_{ij}) = \min. \quad (149)$$

Věta o absolutním minimu komplementární energie

Ze všech staticky přípustných stavů tělesa jedině skutečná napjatost dává komplementární energii soustavy minimální hodnotu.



Carlo Alberto
Castigliano
1847 - 1884

Maticový zápis principu virtuálních přemístění (Lagrange)

Z Lagrangeova principu lze odvodit rovnice rovnováhy a statické okrajové podmínky

$$\iiint_V (\delta \boldsymbol{\varepsilon})^T \boldsymbol{\sigma} dV - \iiint_V (\delta \mathbf{u})^T \bar{\mathbf{X}} dV - \iint_{S_p} (\delta \mathbf{u})^T \bar{\mathbf{p}} dS = 0, \quad (150)$$

$$\bar{\mathbf{X}} = \begin{Bmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \\ \bar{Z} \end{Bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{p}} = \begin{Bmatrix} \bar{p}_x \\ \bar{p}_y \\ \bar{p}_z \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\Gamma} \mathbf{u} \quad \text{a} \quad \boxed{\mathbf{u} \Big|_{S_p} = \bar{\mathbf{u}}}, \quad (\text{doplňující podmínky})$$

kde $\delta \mathbf{u}$ libovolné kinematically přípustné pole posunutí,
 $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$ libovolné kinematically přípustné pole deformace.

DEFORMAČNÍ METODA

Maticový zápis principu virtuálních sil (Castigliano)

Z Castiglianova principu lze odvodit geometrické rovnice a geometrické okrajové podmínky

$$\iiint_V (\delta \boldsymbol{\sigma})^T \boldsymbol{\varepsilon} dV - \iiint_V (\delta \mathbf{X})^T \bar{\mathbf{u}} dV - \iint_{S_u} (\delta \mathbf{p})^T \bar{\mathbf{u}} dS = 0, \quad (151)$$

$$\boldsymbol{\partial} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{X} = \mathbf{0} \quad \text{statické podmínky rovnováhy,} \quad \boxed{\mathbf{p} \Big|_{S_u} = \bar{\mathbf{p}}}, \quad \text{doplňující podmínky,}$$

a $\boldsymbol{\partial}$ operátor,

kde $\delta \mathbf{X}, \delta \mathbf{p}$ libovolné staticky přípustné pole zatížení,
 $\delta \boldsymbol{\sigma}$ libovolné staticky přípustné pole napětí.

SILOVÁ METODA

Přetvoření a napětí při teplotních změnách

V případě, že změna teploty je lineární funkcí souřadnic x , y a z a těleso je podepřeno staticky určitým způsobem, změny objemu a tvaru tělesa nejsou spojeny se vznikem napjatosti v tělese.

U staticky neurčitým podepření v důsledku nadbytečných vazeb bránících volné změně rozměrů tělesa od teplotního pole vznikají v těchto vazbách síly a tímto i napětí v tělese. Těleso nemůže volně dilatovat.

Označme počáteční teplotu, při které jsou dány rozměry tělesa T_0 a novou teplotu T , potom přírůstek teploty $\Delta T = T_0 - T$. Nechť součinitel teplotní roztažnosti je označen α_T , Potom poměrná změna délky od působení změny teploty v případě izotropního materiálu

$$\varepsilon_T = \alpha_T \Delta T. \quad (152)$$

Pro prut délky L s konstantní změnou teploty ΔT lze stanovit jeho prodloužení

$$\Delta L_T = \int_0^L \varepsilon_T dL = \int_0^L \alpha_T \Delta T dL = \alpha_T \Delta T \int_0^L dL = \alpha_T \Delta T L.$$

Pro prut na koncích neposuvný vzniká osová napětí, které lze určit z podmínky

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{xT} + \varepsilon_{xN} = 0, \text{ kde } \varepsilon_{xN} \text{ poměrná deformace od osová síly. Přetvoření } \varepsilon_{xN} = \frac{\sigma_{xx}}{E}.$$

$$\alpha_T \Delta T + \frac{\sigma_{xx}}{E} = 0. \quad \text{ Nakonec } \boxed{\sigma_{xx} = -E \alpha_T \Delta T.}$$

V případě spojitého těles podle principu superpozice např. $\varepsilon_{xx}^T = \varepsilon_{xx} + \alpha_T \Delta T$

$$\boxed{\varepsilon_{ii}^T = \varepsilon_{ii} + \alpha_T \Delta T, i = x, y, z, \quad \varepsilon_{xy}^T = \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{yz}^T = \varepsilon_{yz}, \varepsilon_{zx}^T = \varepsilon_{zx}. \quad (153)}$$

FYZIKÁLNĚ NELINEÁRNÍ MODELY

Materiály s nepružnou deformací – nevratné deformace

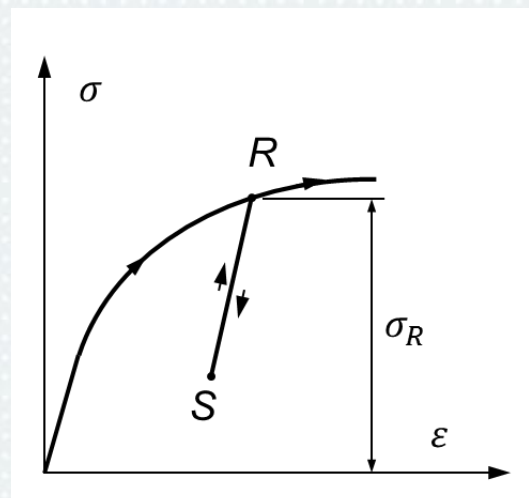
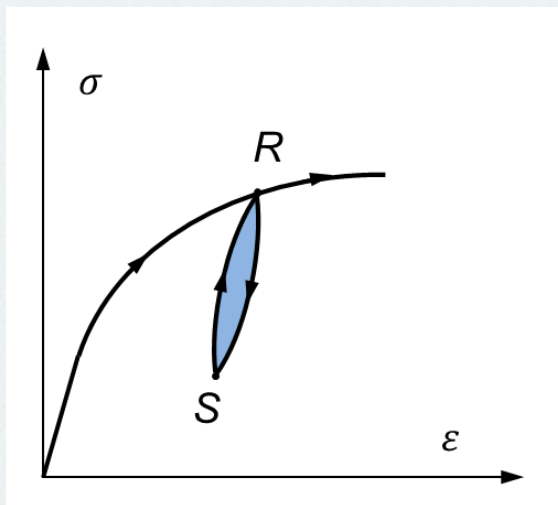
Připustíme-li existenci nepružných deformací vzniknou poměrně složité nelineární (fyzikální) vztahy.

Napjatost σ obecně závisí nejen na okamžitém stavu ε , ale na celé historii od počátečního do vyšetřovaného stavu. To znamená v konkrétních úlohách hraje roli čas – sleduje se časová délka a rychlost časových změn.

Takové obecné modely materiálu lze nazvat reologické nebo také fyzikálně nelineární.

Reologické modely materiálů

Materiál s pružně plastickými vlastnostmi se nechová při odlehčení stejně jako při zatěžování. Předpokládáme-li, že zatížení materiálu roste až po bod R . Potom nastane částečné odlehčení a diagram pokračuje do bodu S . Nato proběhne přitížení, kdy graf se vrací do bodu R . Plocha ohraničená hysterezní smyčkou RSR představuje disipovanou mechanickou energii.

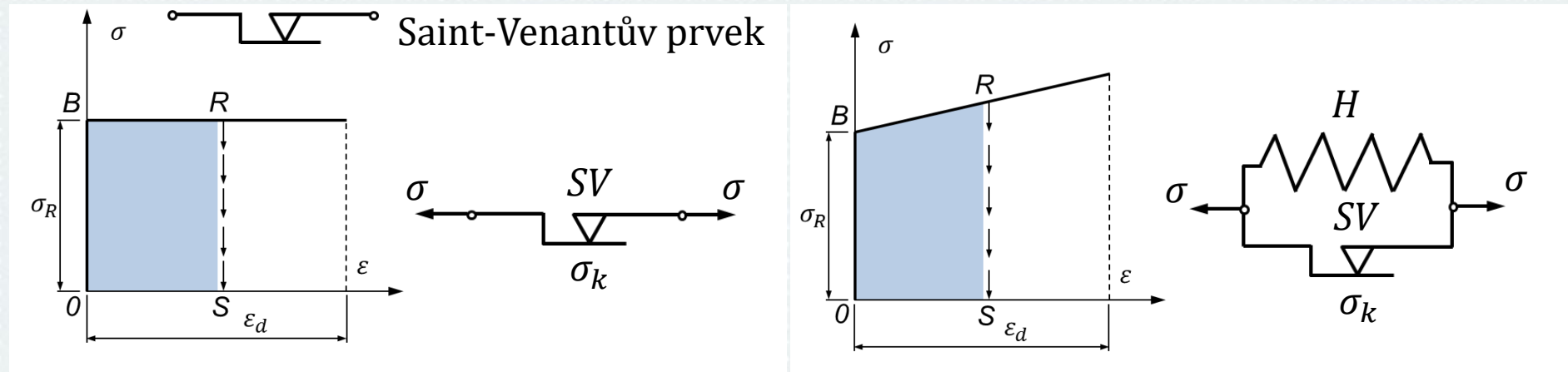


Když při zatížení překročíme mez kluzu σ_k , potom odlehčení a zpětné zatížení má vliv na zvýšení meze kluzu $\sigma_R \geq \sigma_k$.

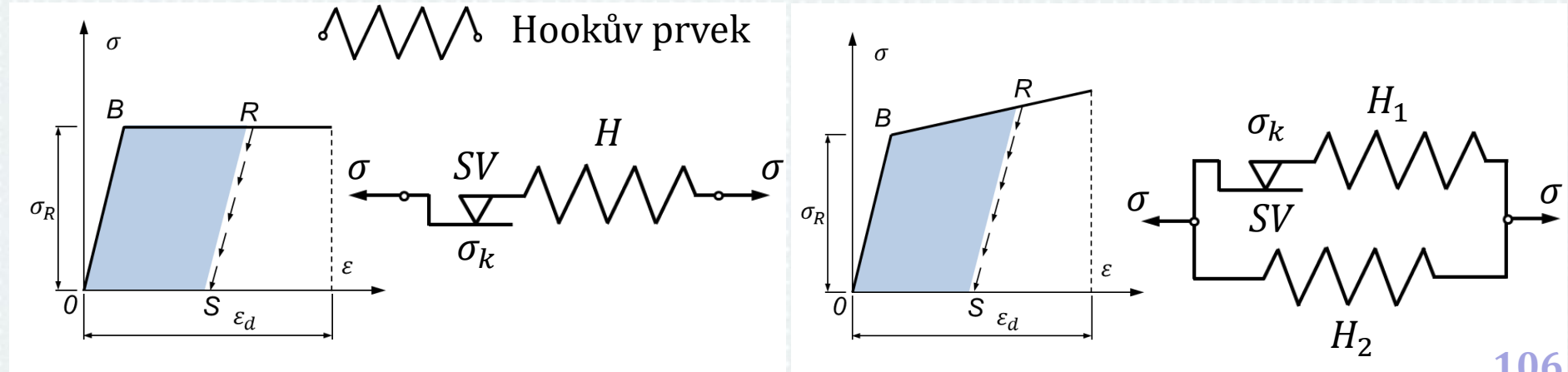
Deformační vlastnosti stavebních materiálů lze s dostatečnou přesností vystihnout **bilineárním pracovním diagramem** - ocel (E a E_p), beton (E_s a E_p).

Podle zalomení lineárních částí uvažujeme 4 základní případy.

1. Tuho-plastický materiál
2. Tuho-plastický materiál s lineárním zpevněním



3. Pružně-plastický materiál
4. Pružně-plastický materiál s lineárním zpevněním



Fyzikální rovnice izotropního materiálu s časově závislým přetvořením

Diskrétní modely – zkoumá se reologie materiálu

Změny v čase – **relaxace** materiálu a **dotvarování**

	třecí prvek	Saint-Venantův prvek
	pružný prvek	Hookův prvek
	viskózní prvek	Newtonův prvek

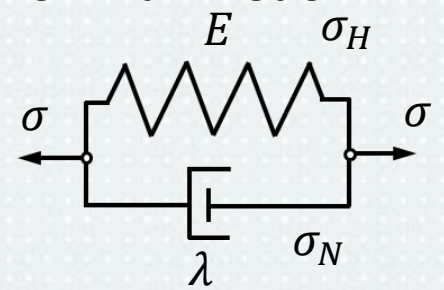
U Newtonova viskózního prvku síla v něm je závislá na rychlosti deformace (rychlosti vzájemného posunutí konců prvku).

$$\sigma = \lambda \frac{d\varepsilon}{dt} = \lambda \dot{\varepsilon}, \quad (167)$$

kde λ je součinitel viskózního tření (odporu, tlumení), t je čas ($\dot{\varepsilon} = \frac{d\varepsilon}{dt}$)

V reologii materiálů se jejich model popisuje na různých kombinacích základních prvků.

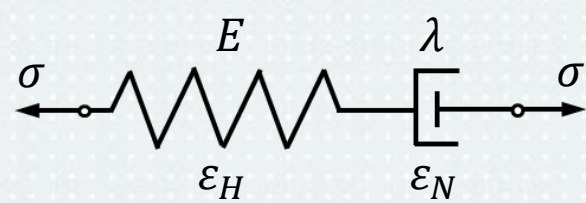
Kelvinův model



$$\sigma = \sigma_H + \sigma_N = E\varepsilon + \lambda \dot{\varepsilon}$$
$$\varepsilon = \varepsilon_H = \varepsilon_N$$

(168)

Maxwellův model



$$\sigma = \sigma_H = \sigma_N$$
$$\varepsilon = \varepsilon_H + \varepsilon_N$$

(169)

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_H + \dot{\varepsilon}_N$$

Nakonec fyzikální rovnice Maxwellovy látky

$$\dot{\varepsilon} = \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{1}{\lambda} \sigma = \frac{1}{E} \dot{\sigma} + \frac{1}{\lambda} \sigma$$

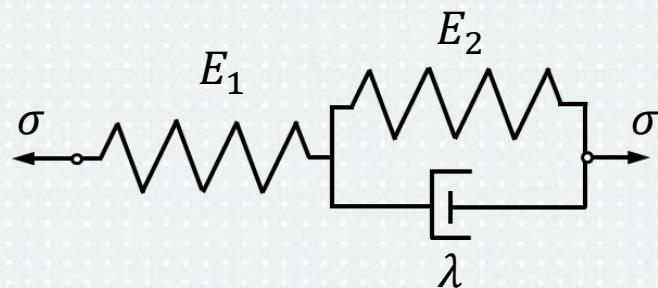
(170)

Obdobně jako Kelvinův a Maxwellův model se dají sestavit složitější modely.

Funkce E a λ mohou být pouze funkcí času ($E = E(t)$, $\lambda = \lambda(t)$) – transcendentní reologie.

V případě, že uvedené veličiny jsou i funkcí napětí, přetvoření apod. hovoříme o parametrické reologii.

Tříparametrický model – Poyntingova-Thomsonova látka



Platí $\sigma_H + \sigma_K = \sigma = \varepsilon_1 E_1 = \varepsilon_K E_2 + \lambda \dot{\varepsilon}_K$

$$\varepsilon = \varepsilon_H + \varepsilon_K,$$

kde $\varepsilon_H = \frac{\sigma}{E_1}$, $\varepsilon_K = \varepsilon - \varepsilon_H = \varepsilon - \frac{\sigma}{E_1}$.



Po dalších úpravách

$$\frac{\lambda}{E_1} \frac{d\sigma}{dt} + m\sigma = \varepsilon E_2 + \lambda \dot{\varepsilon}, \quad \text{kde } m = 1 + \frac{E_2}{E_1}.$$

Po vynásobení poslední rovnice výrazem $e^{E_2 t / \lambda}$ a dalších úpravách

$$\frac{d}{dt} (\varepsilon e^{E_2 t / \lambda}) = \frac{1}{\lambda} \left(m + \frac{\lambda}{E_1} \frac{d\sigma}{dt} \right) e^{E_2 t / \lambda}.$$

Integrací v časovém intervalu $\tau \in \langle t_0, t \rangle$ dostaneme

$$\varepsilon(t) = e^{-E_2 t / \lambda} \left\{ \varepsilon_0 e^{E_2 t_0 / \lambda} + \int_{t_0}^t \left[\frac{1}{\lambda} m \sigma(\tau) + \frac{1}{E_1} \frac{d\sigma(\tau)}{d\tau} \right] e^{E_2 \tau / \lambda} d\tau \right\} \quad (171)$$

Kde $\varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{E_1}$ je počáteční přetvoření v čase t_0 .

Inverzní vztah získáme vynásobením poslední rovnice členem $e^{mE_1 t/\lambda}$ a upravíme na tvar

$$\frac{d}{dt}(e^{mE_1 t/\lambda}\sigma) = \frac{E_1}{\lambda}\left(E_2\varepsilon + \lambda\frac{d\varepsilon}{dt}\right)e^{mE_1 t/\lambda}.$$

Potom

$$\sigma(t) = e^{-mE_1 t/\lambda}\left\{\sigma_0 e^{mE_1 t_0/\lambda} + E_1 \int_{t_0}^t \left[\frac{E_2}{\lambda}\varepsilon(\tau) + \frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau}\right]e^{mE_1 \tau/\lambda}d\tau\right\}.$$

(172)

Při konstantním napětí $\sigma \equiv \sigma_0 = konst.$ lze získat vztah pro dotvarování

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E_1} + \frac{\sigma_0}{E_2}\left[1 - e^{E_2(t-t_0)/\lambda}\right].$$

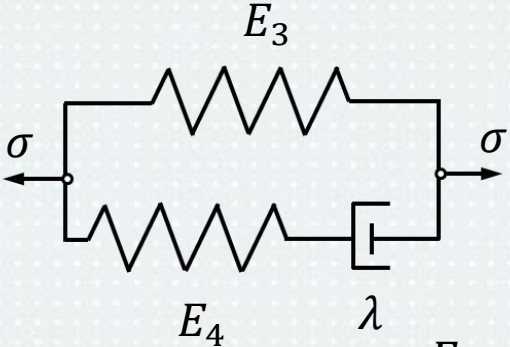
(173)

Při konstantním přetvoření $\varepsilon \equiv \varepsilon_0 = konst.$ lze získat vztah pro relaxaci (ochabování)

$$\sigma(t) = \sigma_0 e^{-mE_1(t-t_0)/\lambda} + \varepsilon_0 \frac{E_2}{m}\left[1 - e^{mE_1(t-t_0)/\lambda}\right].$$

(174)

Tříparametrický model – Zenerova látka



$$E_3\varepsilon(t) + \lambda_4\left(1 + \frac{E_3}{E_4}\right)\frac{d\varepsilon}{dt} = \sigma + \frac{\lambda_4}{E_4}\frac{d\sigma}{dt}.$$

(175)

Zenerovu látku s konstantami E_3, E_4 a λ_4 popisují stejné vztahy jako Poyntingovu-Thomsonovu látku s konstantami E_1, E_2 a λ .

$$E_1 = E_3 + E_4, \quad E_2 = \frac{E_3}{E_4}(E_3 + E_4), \quad \lambda = \left(\frac{E_3 + E_4}{E_4}\right)^2 \lambda_4.$$

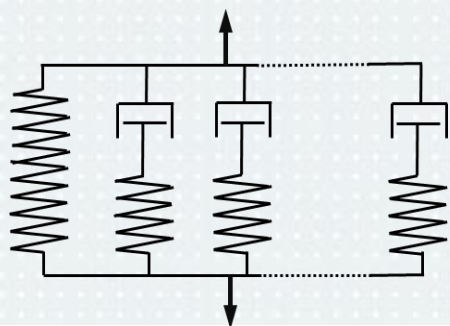
Vztah pro dotvarování PT látky lze použít i pro Kelvinův prvek ($E_1 = \infty, E_2 = E$ a $m = 1$)

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} [1 - e^{E(t-t_0)/\lambda}]. \quad (176)$$

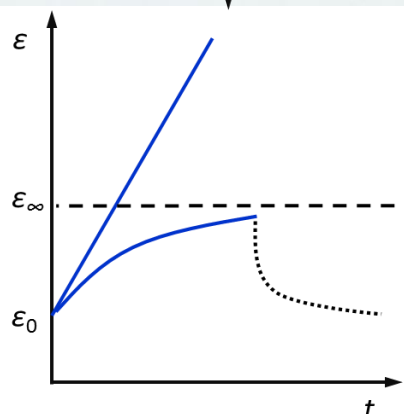
Podobně na dotvarování Maxwellovy látky je třeba zavést ($E_1 = E, E_2 = 0$ a $m = 1$) a po dalších úpravách lze získat

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} + \frac{\sigma_0}{\lambda} (t - t_0). \quad (177)$$

Zobecněný Maxwellův model založený na užití Pronyho řad (pro modelování viskoelastické deformace)

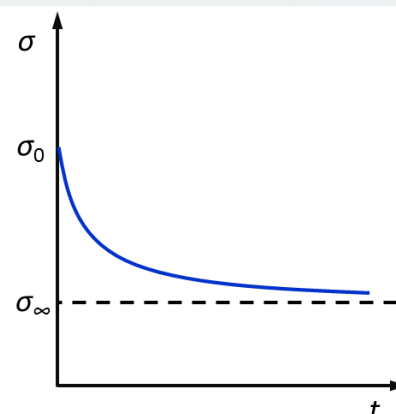


Smykový modul $G(t)$ a objemový modul $K(t)$ jsou funkcemi času. Tyto hodnoty vstupují do vztahu pro výpočet $\sigma(t) = f(\dot{\varepsilon}(t), G(t), K(t))$.



Creep a znovu nabytí
původního tvaru

Jestliže, konstantně působící zatížení je odebráno, část viskoelastické deformace se postupně zmenšuje (větev značená tečkami). To znamená, že u visko-elasticity, obdobně jako u creepu (dotvarování), je část deformace po odtížení vratná.



Relaxace materiálu

Obecná charakteristika reologického materiálu

Na rozdíl od diskrétních modelů pro popis reologie materiálů, předpokládejme opět část tělesa jako elementární objem $dx dy dz$. Tento objem se dá nazvat „skříňkou přeměn“.

Na vstupu do skříňky uvažujeme veličiny zatížení (napětí) $\sigma = \{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \dots, \sigma_{zx}\}^T$ a teplotu T a na výstupu obdržíme výstupní veličiny $\varepsilon = \{\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \dots, \varepsilon_{zx}\}^T$. Je zřejmé, že parametry σ , T a ε plně popisují sledovaný „jev přeměn“. Přetvoření ε je plně v závislosti na daných vlastnostech „skříňky“ vstupními veličinami σ , T a jejich historií v čase t . Nekonečně malé přírůstky $d\varepsilon$ odpovídají přírůstkům $d\sigma$, dt a dT . Potom lze zapsat

$$d\varepsilon = \mathbf{A} d\sigma + \mathbf{B} dt + \mathbf{C} dT, \quad (178)$$

t je čas, prvky matice $\mathbf{A}$ a složky vektorů $\mathbf{B}$ a $\mathbf{C}$ jsou nějak závislé na $\varepsilon(\mathbf{x}, t)$, $\sigma(\mathbf{x}, t)$ a $T(\mathbf{x}, t)$. V případě, že se omezíme na izotermické soustavy, pro něž $T = \text{const}$, potom $dT = 0$ a poslední člen v rovnici odpadne.

Necht' v čase $t = 0$ je známo pole σ a ε . Rovněž je známa historie vnějších vlivů σ .

Výsledná odezva může být okamžitá nebo následná. Při odezvě okamžité $B_i = 0$ a A_{ij} nezávisí na čase. V tomto případě se odezva projeví okamžitě a dále se nemění, dokud se nezmění σ . Následná odezva vzniká v průběhu času.

Odezva může být vratná a nevratná v závislosti co nastane, když vnější vlivy vymizí. Celková odezva soustavy po vymizení vnějších vlivů lze vyjádřit ve tvaru součtu vratné a nevratné odezvy. Nevratné přetvoření je „paměť“ na vymizelé vnější vlivy.

Základní nelineární materiálové modely vhodné pro ocel

Pro aplikace modelů je třeba se seznámit se základními pojmy z oblasti plasticity.

Základy plasticity kovů

Když tažný materiál bude namáhán napětím přesahující mez pružnosti, potom lze zaznamenat nárůst velkých trvalých deformací.

- Plasticita se váže k odezvě materiálu za mezí kluzu.
- Plasticita odezva je důležitá v případě tváření kovů.
- Plasticita je také důležitá jako mechanismus pohlcování energie v konstrukcích při jejich užívání.

Materiály s malou tažností

- Materiály, které selžou při malé plastické deformaci jsou považovány za křehké.
- Duktilní (plastické) chování konstrukce je v mnoha ohledech bezpečnější než křehká odezva konstrukce.

Plastická deformace nastává v důsledku prokluzu mezi vrstvami atomů v důsledku smykových sil (deviátorové napětí). Jedná se o dislokaci a přeskupení atomů v krystalické struktuře (toto lze zjednodušeně nazvat „prokluz“ vrstev).

Výsledkem je nevratná nebo trvalá deformace po odtížení.

Prokluz (deformace od smyku) nezpůsobuje žádné objemové namáhání (stav objemové nestlačitelnosti), na rozdíl od pružného stavu.

Plastická odezva konstrukce (typicky v důsledku víceosého stavu napětí) vychází z výsledků zkoušek na jednoosém zkušebním tělese.

Z výsledků jednoosé napětově-deformační zkoušky lze odvodit tyto informace:

- Mez proporcionality (oblast platnosti Hookova zákona $\sigma = E\varepsilon$).
- Mez kluzu.
- Materiálové zpevnění.

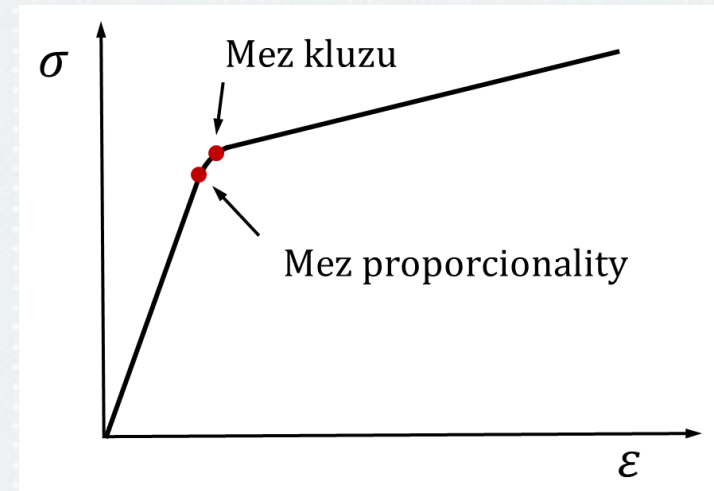
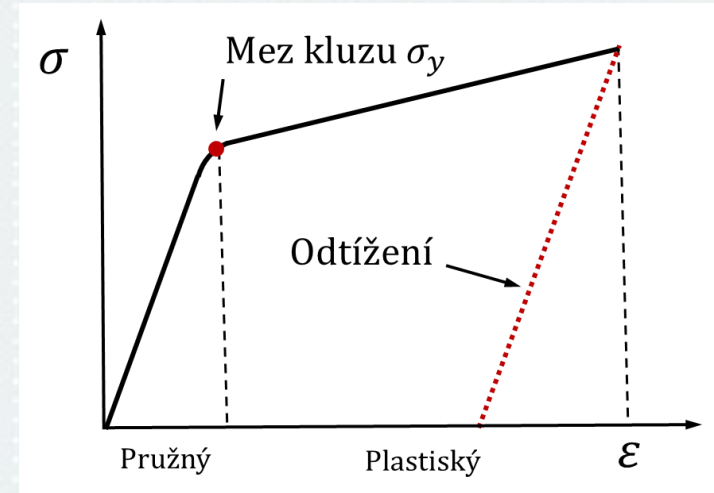
Mez proporcionality a mez kluzu

Většina duktilitních kovů se chová lineárně do úrovně napětí nazývané mezí proporcionality.

- Pod touto mezí je závislost napětí na deformaci lineární. Navíc pod mezí kluzu v oblasti po mez proporcionality je závislost napětí-deformace pružná.
- Po odtížení nenastává trvalá deformace.

Protože se jedná o malý rozdíl mezi mezí proporcionality a mezí kluzu, potom ve výpočtech se uvažuje pouze mez kluzu.

Část křivky (diagramu) napětí-deformace pod mezí kluzu se nazývá pružná a část nad mezí kluzu se nazývá plastická.



Materiálové zpevnění

Po prokluzu (po překonání meze kluzu) je chování materiálu charakterizováno jako pružné-perfektně plastické a nebo jako zpočátku pružné s následným deformačním zpevněním.

Deformační zpevnění je odezva materiálu, při kterém se mez kluzu zvětšuje v závislosti na růstu deformace v oblasti za počáteční mezí kluzu.

Plasticita nezávislá na rychlosti

Je-li materiál nezávislý na rychlosti zatěžování silami nebo deformacemi, potom hovoříme, o materiálové plasticitě „rychlostně nezávislé“ (Rate-Independent Plasticity).

Většina kovů je plasticky rychlostně nezávislá při teplotách menších než $1/4$ až $1/3$ teploty tání a při malých rychlostech zatěžování (kvazistatika).

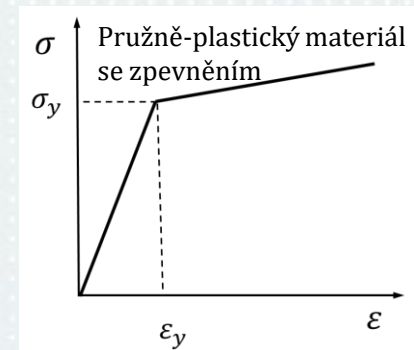
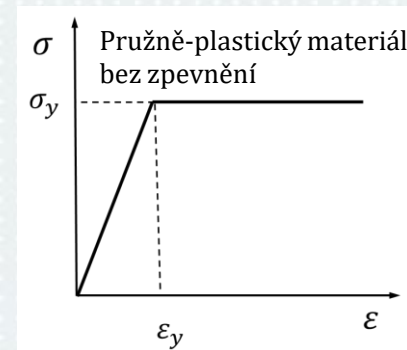
Fyzikální rovnice pružnoplastického materiálu

Předpokládá se, že vektor celkového přetvoření $\boldsymbol{\varepsilon}^{tot}$ lze rozdělit na pružnou a plastickou část

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{tot} = \boldsymbol{\varepsilon}^{el} + \boldsymbol{\varepsilon}^{pl}. \quad (179)$$

Vektor napětí $\boldsymbol{\sigma}$ vztažený k pružným deformacím pomocí matice pružnostních konstant $\mathbf{D}$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}^{el} = \mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon}^{tot} - \boldsymbol{\varepsilon}^{pl}).$$



Jednoosý diagram napětí-deformace

Při odvození potřebných rovnic se vychází z přírůstkové (inkrementální) teorie plasticity.

Přírůstková (inkrementální) teorie plasticity

Je založena na matematických vztazích charakterizovanými přírůstkem napětí $\Delta\sigma$ a deformací $\Delta\varepsilon$ popisující chování materiálu v plastické oblasti.

Teorie inkrementální plasticity má **tři základní části**:

1. Kritérium vzniku plasticity (definování plochy plasticity),
2. Zákon toku (zákon plastické deformace),
3. Zákon (formulace) zpevnění.

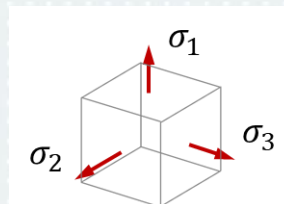
1. Kritérium vzniku plasticity

Vznik plasticity se odvozuje ze vztahů mezi víceosou napjatostí a jednoosými stavy napjatosti.

- Tahové zkoušky na vzorcích poskytují data, která se dají jednoduše zobrazit a představují napěťo-deformační křivku.
- Skutečná konstrukce obvykle vykazuje víceosý stav napětí. Kritérium vzniku plasticity poskytuje skalární invariantní míru stavu napětí materiálu, kterou lze srovnávat s jednoosým případem napjatosti.

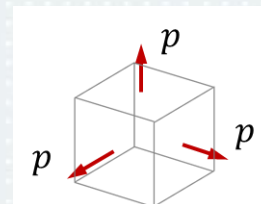
V obecnosti stav napětí může být rozdělen na dvě části:

- Hydrostatické napětí – generuje objemové změny
- Deviatorové napětí – generuje tvarové změny



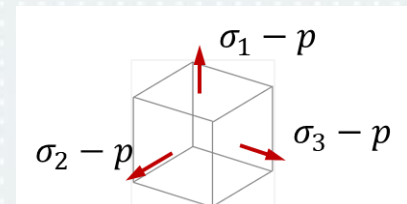
Stav napětí
($\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$)

=



Hydrostatické napětí p
způsobující pouze
objemové změny

+



Deviátorové napětí způsobující
pouze tvarové změny

Von Misesovo kritérium předpokládá, že mez vzniku plasticity od energie odpovídající tvarovým deformacím v jednotce objemu je rovna energii ve stejném objemu v případě jednoosé napjatosti na mezi kluzu.

Za tohoto předpokladu je odvozen skalární invariant (von Misesovo ekvivalentní napětí):

$$\sigma_e = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}. \quad (180)$$

Když von Misesovo napětí překročí hodnotu meze kluzu při jednoosém namáhání, potom nastává zplastizování (kluz) materiálu.

Zobecněním předchozí úvahy o tom, že materiálový model se vyznačuje nevratnými deformacemi v případě, kdy jsou překročena kritéria platná pro pružnou oblast a za předpokladu, že plastické deformace vznikají okamžitě, to znamená nezávisle na čase, potom v 6 rozměrném prostoru napětí je pružná oblast ohraničena funkcí kluzu F .

$$F(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\kappa}) \leq 0, \quad (181)$$

kde $\boldsymbol{\kappa}$ je vektor proměnných vyjadřující zpevnění popřípadě změkčení materiálu.

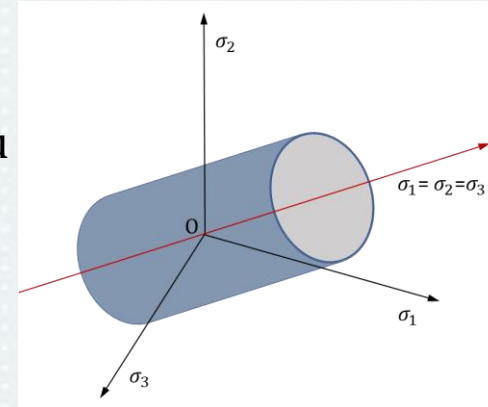
Pružný stav je reprezentován případem, kdy $F(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\kappa}) < 0$.

Plocha kluzu $F(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\kappa}) = 0$ definuje hranici pružné oblasti.

V 3D prostoru hlavních napětí Misesovo napětí odpovídající počátku vzniku plasticity tvoří **válec** s osou, na které $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$.

Lze poznamenat, že stav napětí uvnitř válce nedosahuje hodnot pro vznik plasticity.

Dále, je-li materiál zatížen hydrostatickým napětím $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$, potom žádná jeho velikost nezpůsobí vznik plasticity.



2 Zákon toku (přetváření)

Rozvoj plastické deformace se určuje podle zákona toku.

$$d\varepsilon^{pl} = d\lambda \frac{\delta Q}{\delta \sigma}, \quad (182)$$

kde λ je měřítko přírůstku plastické deformace, Q je plastický potenciál, tj. funkce potenciální energie, která představuje povrch v prostoru napětí a plastický přírůstek $d\varepsilon^{pl}$ je vektor ve směru normály k tomuto povrchu (obdobně jako v lineární teorii). Z daného předpokladu se jedná o **asociovaný zákon toku**.

Zákon toku definuje jak se jednotlivé složky plastické deformace (ε_x^{pl} , ε_y^{pl} atd.) mění s kluzem.

Zákon toku odvozený podle uvedeného kritéria vzniku plasticity je typickým příkladem implikující, že plastická deformace se rozvíjí ve směru kolmém k ploše plasticity.

- Takový zákon toku (přetváření) se nazývá asociativní.
- Všechny modely plasticity kovů mají zpravidla popis odpovídající asociativní zákonu toku.

Zákony toku, která jsou odvozeny z funkcí, které jsou odlišné od uvedeného kritéria se nazývají **neasociativní zákony toku**. Tyto zákony potom mohou vystihovat realističtěji efekty vycházející z experimentů (např. dilatance u zemin).

Zde patří modely pro zeminy, kámen, beton atd. Mezi neasociativní modely plasticity patří např. Drucker-Pragerův model – pro modelování keramiky, „Cast Iron“ model – pro modelování litiny apod.

3 Zákon (formulace) zpevnění

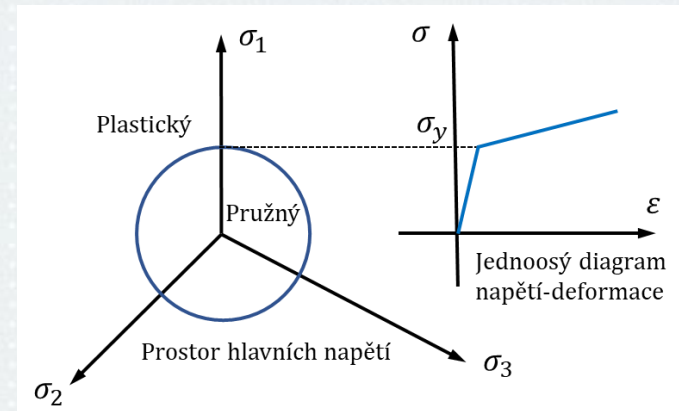
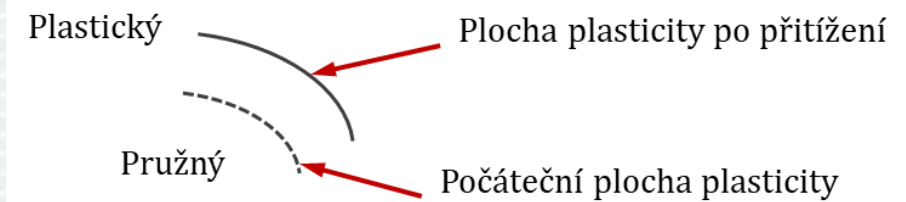
- Zákon zpevnění popisuje, jak se mění plocha plasticity (velikost, poloha a tvar) v důsledku plastické deformace.
- Zákon zpevnění určuje, co se bude dít dále s kluzem materiálu při narůstajícím zatížení, popřípadě při odtížení.
- Toto je v kontrastu s pružnoplastickým materiálem bez zpevnění, kde plocha plasticity se nepohybuje.

Uvažujme opět plochu plasticity ve tvaru válce.

Není definován napjatostní stav **za** plochou válce.

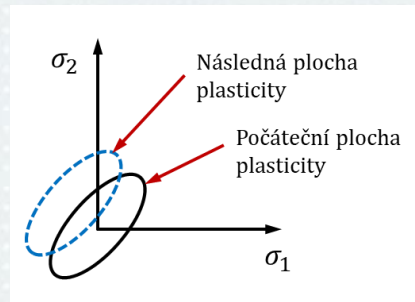
Ve skutečnosti, zákon zpevnění popisuje změny válce v závislosti na kluzu (posun vrstev atomů v materiálu)

Rozlišují se dva základní zákony zpevnění popisující změny plochy plasticity (kluzu).



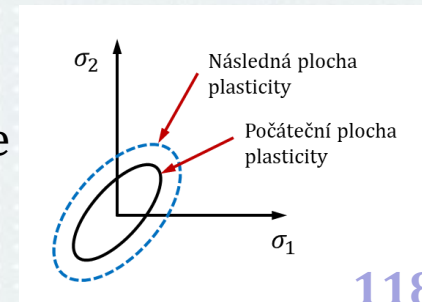
Kinematické zpevnění

Plocha plasticity se nemění z hlediska své velikosti, ale přemísťuje se ve směru kluzu.



Izotropní zpevnění

Plocha plasticity se rovnoměrně rozšiřuje ve všech směrech plastického toku.

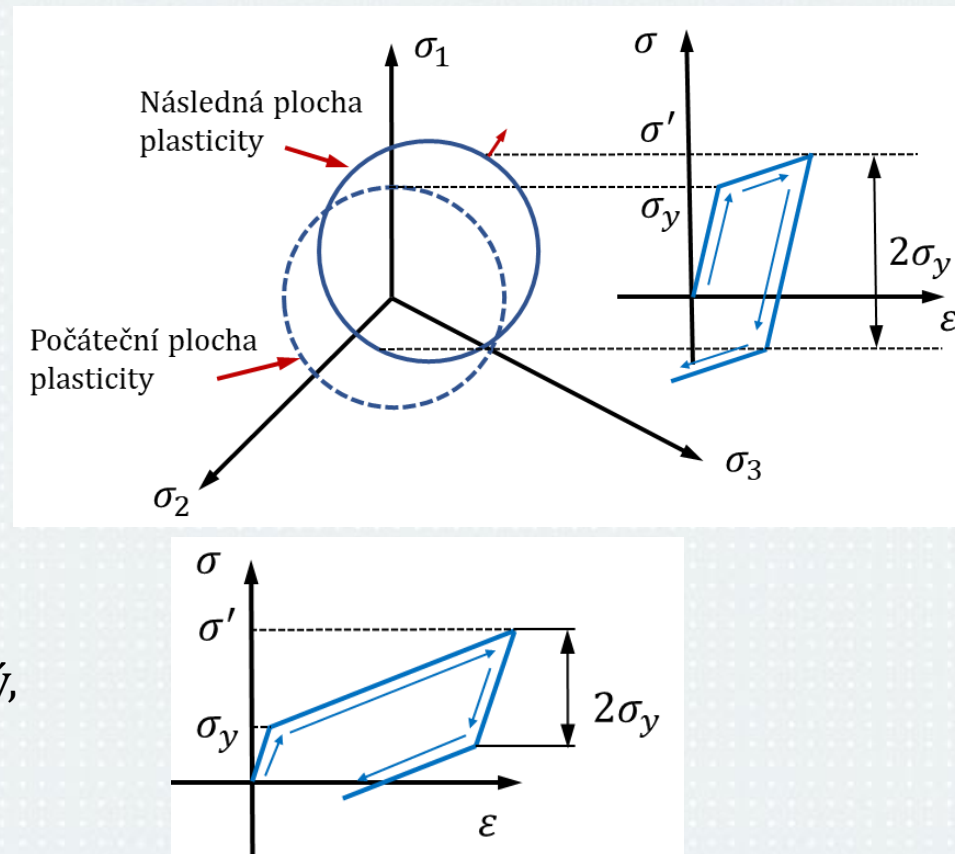


Kinematické zpevnění

Většina kovů v případě cyklickém zatížení deformacemi (cyklické zkoušky materiálu) vykazuje chování materiálu odpovídající kinematickému zpevnění.

Ilustrace chování materiálu při kinematickém zpevnění – závislost deformace na napětí

- Následná hodnota kluzu v tlaku se zmenšuje až o mez kluzu při přechodu do tahu, potom rozdíl mezi kluzy (mezi počáteční a následnou plochou plasticity) je neustále stejný, a to $2\sigma_y$. (Tento jev je znám jako Bauschingerův efekt).
- Původně izotropní materiál již dále není izotropní po kluzu nastává kinematické zpevnění.
- Pro simulace velkých deformací se může stát lineární kinematický model nevhodný, a to kvůli Bauschingerovu efektu (nerealistický průběh při odtížení).



Kinematické zpevnění se v obecnosti používá v případě malých deformací u aplikací s cyklickým zatížením.

Izotropní zpevnění

Izotropní zpevnění znamená, že plocha plasticity se během plastického toku rovnoměrně rozšiřuje. Termín „izotropní“ označuje rovnoměrnou dilataci plochy plasticity.

Vynesení křivky napětí-deformace umožňuje porozumět tomu, co se děje během cyklu zatěžování a odtěžování:

Z obrázku je patrné, že následný kluz v tlaku se rovná nejvyššímu napětí dosaženému během tahové fáze.

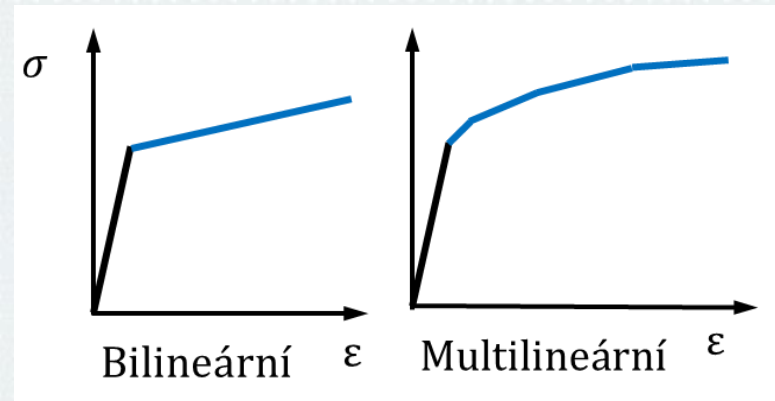
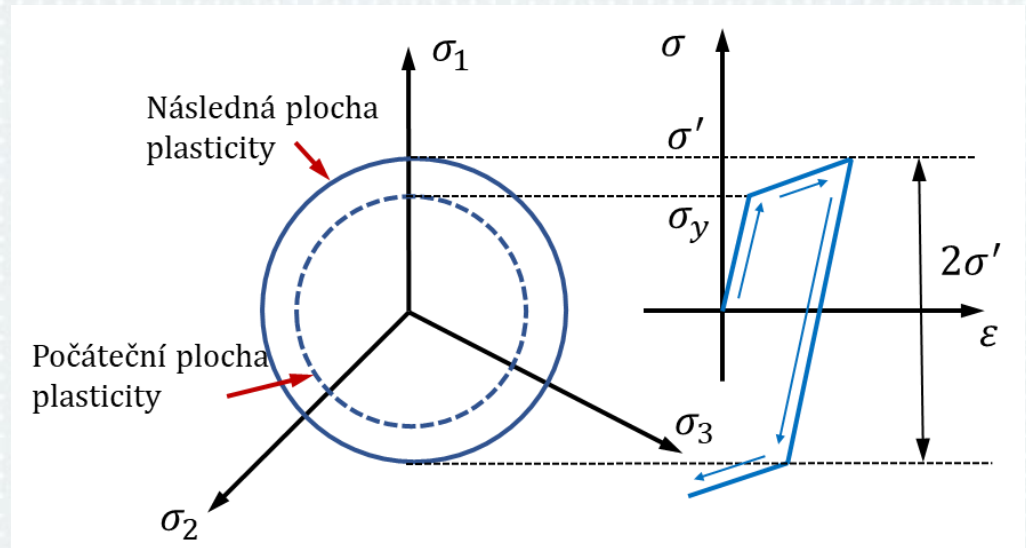
Izotropní zpevnění se často používá pro simulace velkého přetvoření nebo pro proporcionálního zatížení. Při cyklickém zatěžování izotropní zpevnění není obvykle použitelné.

Vstupní data pro výpočty

Jsou různé typy diagramů závislosti napětí-deformace.

Bilineární skládající se ze dvou větví. Lineární část a plastická část se zpevněním.

U multilineární reprezentace je plastická část aproximována po sobě navazujících řadou úseček.



Při experimentu rozlišujeme získané diagramy napětí-deformace podle míry přesnosti na inženýrské a skutečné.

Inženýrské křivky lze použít při analýzách s malými deformacemi, skutečné křivky jsou více reprezentativní při popisu plastického stavu materiálu.

- Jsou-li dána data odpovídající inženýrským závislostem mezi napětím a deformací, pak lze za určitých předpokladů tyto data konvertovat v závislosti odpovídajícím skutečným křivkám, a to takto:

Až do dvojnásobku napětí, při kterém dochází ke kluzu:

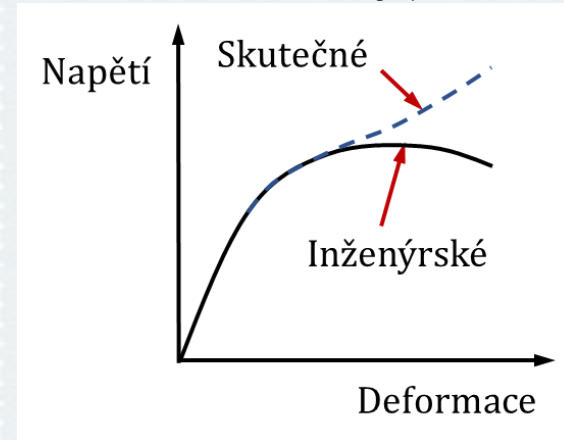
$$\sigma = \sigma_{eng}, \quad \varepsilon = \varepsilon_{eng}.$$

Až do bodu, kdy dojde k výraznému zúžení průřezu (vzniku krčku):

$$\sigma = \sigma_{eng}(1 + \varepsilon_{eng}), \quad \varepsilon = \ln(1 + \varepsilon_{eng}).$$

- Při konverzi napětí se předpokládá že:
 - Materiál je nestlačitelný (přijatelné přiblížení pro velká napětí).
 - Předpokládá se, že rozložení napětí napříč průřezem vzorku je rovnoměrné.
- Po vzniku krčku:
 - Neexistuje žádný převodní vztah mezi inženýrskou a skutečnou závislostí mezi napětím a deformací. Musí být změřen (zohledněn) okamžitý průřez.

Vždy se musí zadat jako minimum modul pružnosti E a součinitel příčné kontrakce ν jako u lineární analýzy.



Modely s malou plasticitou pro geomechaniku

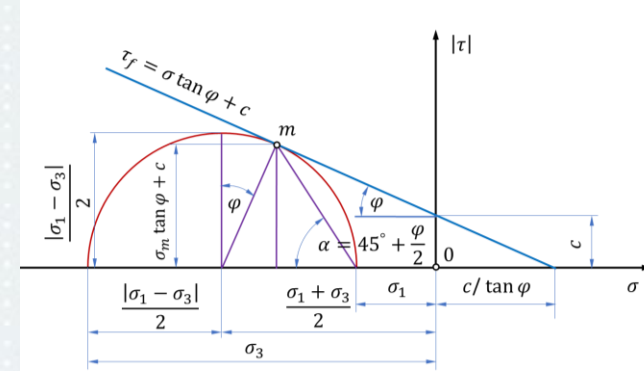
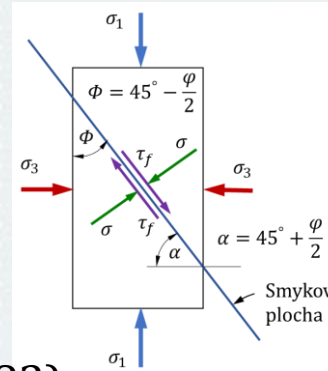
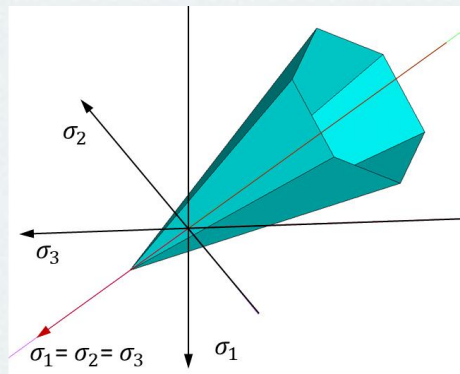
Předpokládají se modely plasticity rychlostně nezávislé (rate-independent) na způsobu zatěžování, tak jako bylo uvedeno u plasticity kovů. Struktura materiálů jako jsou zeminy, horniny je odlišná. Uvažuje se materiál tvořený spojenými zrny (krystaly minerálů, drobné kamenivo atd.).

Mohr-Coulombův model

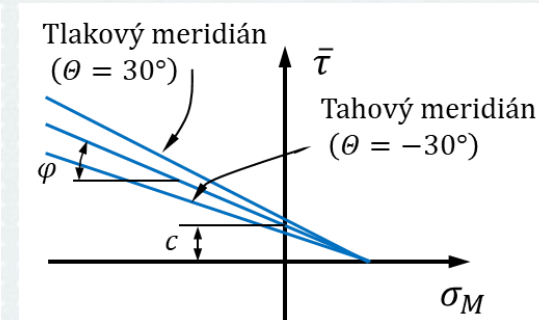
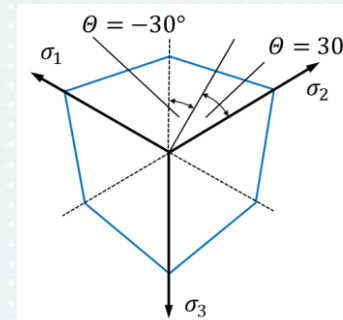
Pro zrnitý materiál se aplikuje klasický Mohr-Coulombův model. Spojuje výsledky experimentů Coulomba a Mohra.

Mez plasticity (porušení) tvoří šestiboký jehlan aproximující Coulombovu rovnici

$\tau_f = \sigma \tan \varphi + c$, kde τ_f je tečné napětí (183) na smykové ploše (smyková pevnost) na mezi porušení, σ je normálové napětí působící kolmo na smykovou plochu, c je soudržnost zeminy (koheze) a φ úhel vnitřního tření.



Namáhání elementu a zobrazení na Mohrově kružnici



Vzhledem k odlišnost chování materiálu v prostorovém tahu a tlaku, má jehlan pouze tři roviny symetrie. Roviny jsou tvořeny oblastí tlakového meridiánu a tahového meridiánu.

Ve tří rozměrném prostoru, Mohr-Coulombovo kritérium plasticity je definováno vztahem

$$F_{MC} = \sigma_m \sin \varphi + \sigma_s \left(\cos \theta - \frac{\sin \theta \sin \varphi}{\sqrt{3}} \right) - c \cos \varphi,$$

$$\text{kde } \sigma_m = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}, \quad \sigma_s = \sqrt{J_2}, \quad \sin(3\theta) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{\sqrt{J_2^3}}.$$

σ_m je hydrostatické napětí, J_2 a J_3 jsou druhý a třetí invariant deviátorového tenzoru napětí, θ je tak zvaný Lodeho úhel, φ je úhel vnitřního tření a c je koheze. Ve speciálním případě, kdy $\varphi = 0^\circ$ potom Mohr-Coulombovo kritérium plasticity se redukuje na plochu plasticity podle Trescy, když $\varphi = 90^\circ$ tak popis odpovídá Rankineovu kritériu.

Obecně izotropní Mohr-Coulombův model využívá neasociovaný zákon toku.

Odpovídající plastický potenciál lze vyjádřit takto:

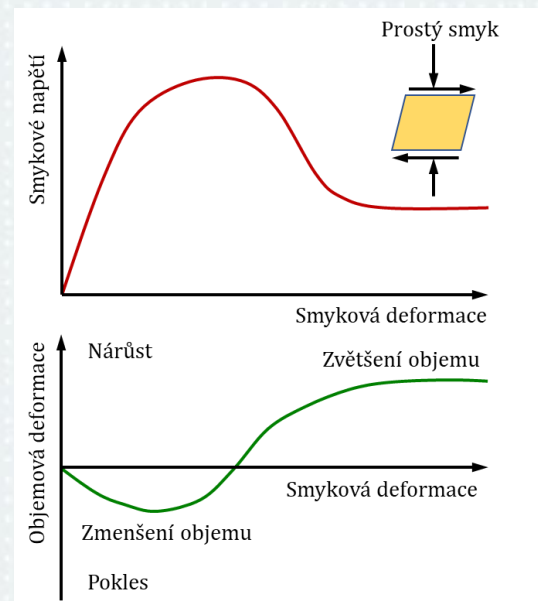
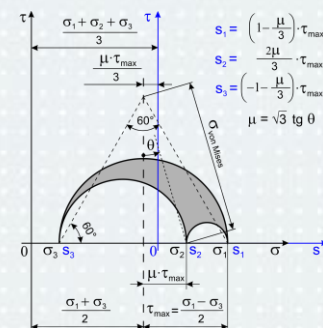
$$Q_{MC} = \sigma_m \sin \psi + \sigma_s \left(\cos \theta - \frac{\sin \theta \sin \psi}{\sqrt{3}} \right), \quad (185)$$

kde ψ je úhel dilatance.

Úhel dilatance (objemová změna od smykových deformací u zrnitého materiálu, zrnitý materiál má tendenci při smykovém namáhání zvětšovat objem).

Lodeho parametr popisuje orientaci vektoru deviátorového napětí $\sigma = \sqrt{2J_2}$, vzhledem k ose $\sigma_1 = -\sigma_3$ v deviátorové rovině. Úhel, který vektor deviátorového napětí svírá s touto osou, se nazývá Lodeho úhel.

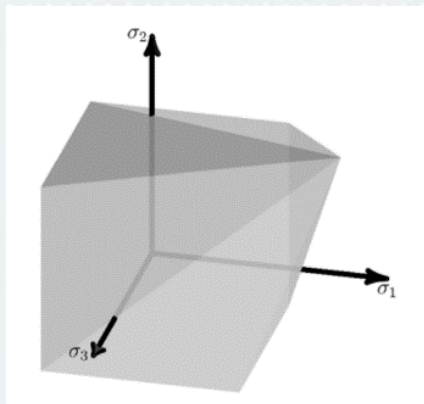
(184)



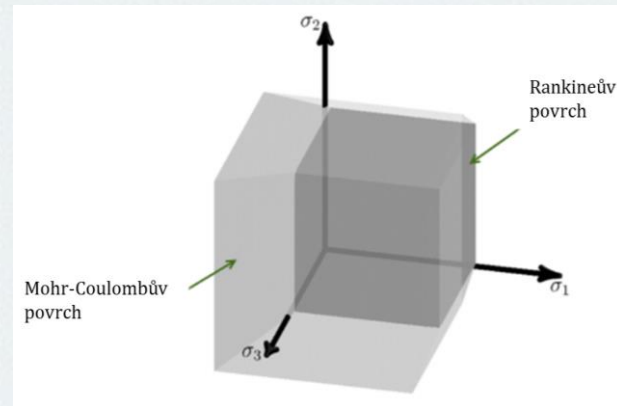
Jednoosá pevnost v tlaku f_c a jednoosá pevnost v tahu f_t se dají dát do souladu s úhlem vnitřního tření φ a kohezí c

$$f_c = c \frac{2 \cos \varphi}{1 - \sin \varphi} = 2c \tan \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) \quad \text{a} \quad f_t = c \frac{2 \cos \varphi}{1 + \sin \varphi} = 2c \tan \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right). \quad (186)$$

V případě betonu Mohr-Coulombova plocha kluzu nevystihuje oblast tahové pevnosti (u betonu pevnost v tahu je mnohonásobně menší než pevnost v tlaku). Pro více realistické chování je nutno doplnit Mohr-Coulombův model o další kritérium v oddělené tahové části plochy kluzu.



Původní jehlan
Mohr-Coulombova teorie



Jehlan doplněný o Rankinovy
plochy kluzu

V této oblasti se přidává Rankinova plocha kluzu. Kritérium omezuje maximální hlavní napětí odpovídající pevnosti v jednoosém tahu.

Potom
$$F_{RK} = \sigma_m + \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_s \sin \left(\theta + \frac{2}{3} \pi \right) - f_t, \quad (187)$$

kde f_t je pevnost v tahu. Rankinova plocha plasticity odpovídá asociovanému zákonu toku.

Dále platí
$$f_t \geq \frac{c}{\tan \varphi}.$$

Drucker-Pragerův model

Tento model se standardním Drucker-Pragerovým kritériem lze použít pro popis plastického chování zemin, hornin a betonu. Lze ukázat, že Drucker-Pragerova plocha plasticity v prostoru hlavních napětí je tvořena kuželem. Na rozdíl od Mohr-Coulombova kritéria Drucker-Pragerovo kritérium není závislé na Lodeho úhlu (třetí invariant deviátoru napětí). Potom výsledná vzdálenost plochy plasticity na deviátorové rovině vůči hydrostatické ose je konstantní.

Ve tří rozměrném prostoru, Drucker-Pragerovo kritérium plasticity je definováno vztahem

$$F_{DP} = \sigma_s + \beta \sigma_m - \sigma_{yt}, \quad (187)$$

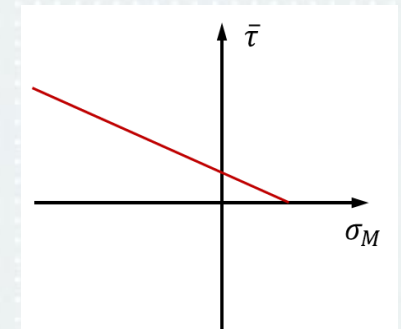
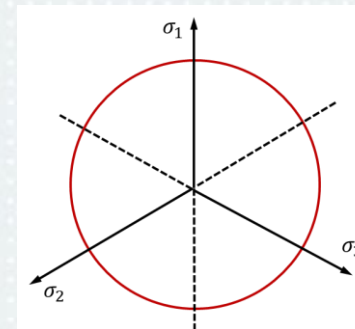
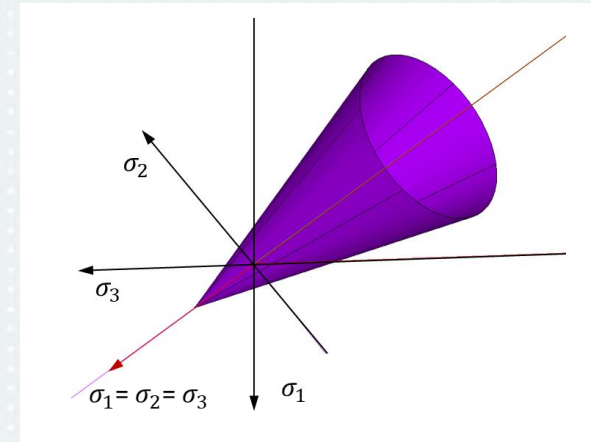
kde $\sigma_m = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}$, $\sigma_s = \sqrt{J_2}$,

σ_m je hydrostatické napětí, J_2 je druhý invariant deviátorového tenzoru napětí, β a σ_{yt} jsou materiálové parametry.

Obecně Drucker-Pragerův model využívá neasociovaný zákon toku. Odpovídající plastický potenciál lze vyjádřit takto:

$$Q_{DP} = \sigma_s + \delta \beta \sigma_m, \quad (188)$$

kde δ je faktor dilatance.



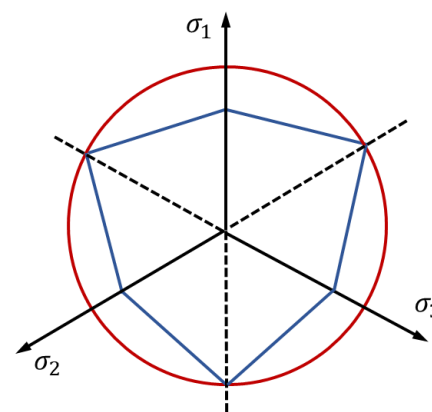
Lze provést porovnání obou modelů.

Je evidentní, že Drucker-Pragerovo kritérium kluzu může aproximovat Mohr-Coulombův stav porušení, buď jako obalující kužel nebo jako vložený kužel. Výsledkem jsou materiálové vlastnosti Drucker-Pragerova modelu odvozené z Mohr-Coulombova modelu.

Vztahy lze dát do relace k pevnosti v tahu f_t a k pevnosti v tlaku f_c

Pro model betonu musí být uvedený Drucker-Pragerův model popis upraven o doplnění dalšího kritéria.

Obecně komplexní porušení nelze popsat pouze jednou plochou kluzu (plasticity). Koncepce více ploch plasticity (multi-surface) dovoluje definovat spojit jednotlivé plochy v závislosti na daných případech porušení, tak jak bylo ukázáno u Mohr-Coulombova modelu. To znamená, plocha plasticity sestává z řady dílčích ploch obalující vnitřní pružnou oblast. Takto tvořená plocha nemusí být hladká v prostoru napětí. Toto může být zdrojem nejednoznačného řešení a zdrojem selhání při řešení.

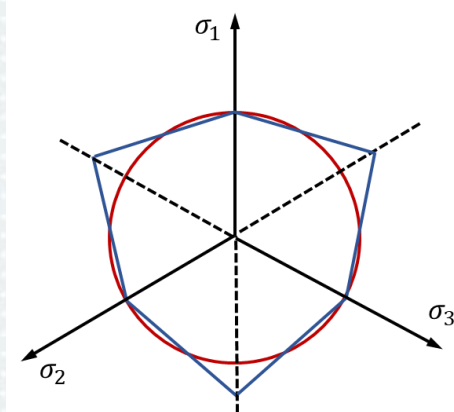


Obalující kužel

$$\beta = \frac{6 \sin \varphi}{\sqrt{3}(3 - \sin \varphi)}$$

$$\sigma_{yt} = \frac{6 c \sin \varphi}{\sqrt{3}(3 - \sin \varphi)}$$

$$f_t = \frac{3\sigma_{yt}}{\sqrt{3} + \beta}$$

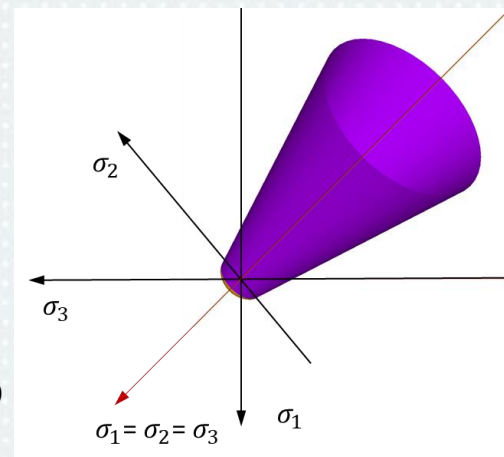


Vložený kužel

$$\beta = \frac{6 \sin \varphi}{\sqrt{3}(3 + \sin \varphi)}$$

$$\sigma_{yt} = \frac{6 c \sin \varphi}{\sqrt{3}(3 + \sin \varphi)}$$

$$f_c = \frac{3\sigma_{yt}}{\sqrt{3} - \beta}$$



Výraz pro zákon toku v případě více ploch plasticity

$$d\varepsilon^{pl} = \sum_n d\lambda^n \frac{\delta Q^n}{\delta \sigma}, \quad (189)$$

kde n je počet aktivních ploch plasticity, $d\varepsilon^{pl}$ je přírůstek plastické deformace, $d\lambda^n$ je měřítko přírůstku plastické deformace a Q^n je plastický potenciál.

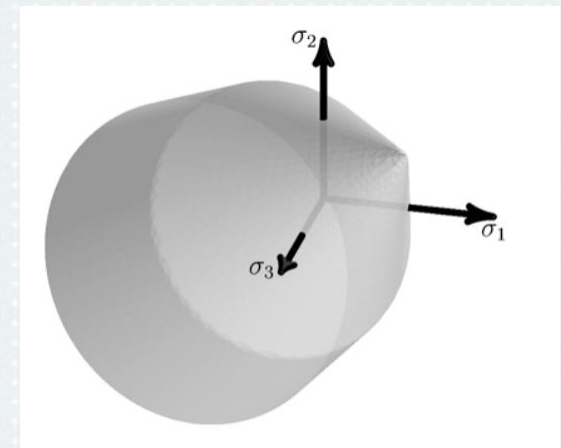
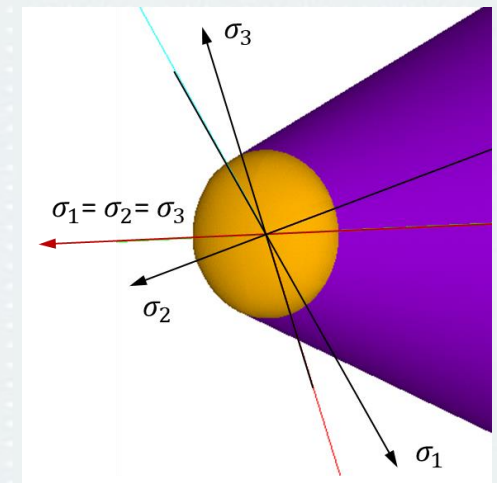
Pro každou jednotlivou plochu je nutno specifikovat **zákon zpevnění**.

Přírůstkové rovnice pro plasticitu s více povrchy a nezávislou na rychlosti zatěžování vedou k systému nelineárních rovnic pro přírůstek plastické deformace, proměnný přírůstek zpevnění a napětí.

Materiálové modely pro modelování betonu

Modifikovaný Drucker-Pragerův model

Pro beton se používá modifikovaný Drucker-Pragerův (DP) model. Klasický DP model je nerealistický v oblasti tahu. Beton se vyznačuje malou pevností v tahu vůči násobné pevnosti v tlaku. Tento jev nelze vystihnout jednou plochou plasticity. Kombinací dvou DP modelů lze získat uvedený nedostatek kompenzovat. Model je tvořen dvěma kužely.



První DP kužel popisuje porušení v tahové a tahově-tlakové oblasti napětí. DP parametry materiálu pro DP plochu kluzu se nastaví podle jednoosé pevnosti v tahu R_t a podle jednoosé pevnosti v tlaku R_c . Potom funkce plochy plasticity

$$F_{DP1} = \sigma_s + \beta_t(\kappa_c, \kappa_t)\sigma_m - \sigma_{yt}(\kappa_c, \kappa_t), \quad (190)$$

kde

$$\beta_t(\kappa_c, \kappa_t) = \frac{\sqrt{3}(R_d\Omega_c(\kappa_c) - R_z\Omega_t(\kappa_c, \kappa_t))}{(R_d\Omega_c(\kappa_c) + R_z\Omega_t(\kappa_c, \kappa_t))} \text{ a } \sigma_{yt}(\kappa_c, \kappa_t) = \frac{2R_d\Omega_c(\kappa_c)R_z\Omega_t(\kappa_c, \kappa_t)}{\sqrt{3}(R_d\Omega_c(\kappa_c) + R_z\Omega_t(\kappa_c, \kappa_t))}.$$

Napětí σ_s a σ_m byla již uvedena, Ω_t je funkce zpevnění/změkčení v tahu, Ω_c je funkce zpevnění/změkčení v tlaku

a κ_c, κ_t jsou odpovídající proměnné zpevnění.

Druhý DP kužel popisuje porušení v tlakově-tlakové oblasti napětí. Plocha plasticity je odvozena z jednoosé pevnosti v tlaku R_c a biaxiální pevnosti v tlaku R_{cb} .

Funkce plochy plasticity

$$F_{DP2} = \sigma_s + \beta_c\sigma_m - \sigma_{yt}\Omega_c(\kappa_c), \quad (191) \text{ kde } \beta_t = \frac{\sqrt{3}(R_u - R_d)}{2R_u - R_d} \text{ a } \sigma_{yc} = \frac{2R_uR_d}{\sqrt{3}(2R_u - R_d)}.$$

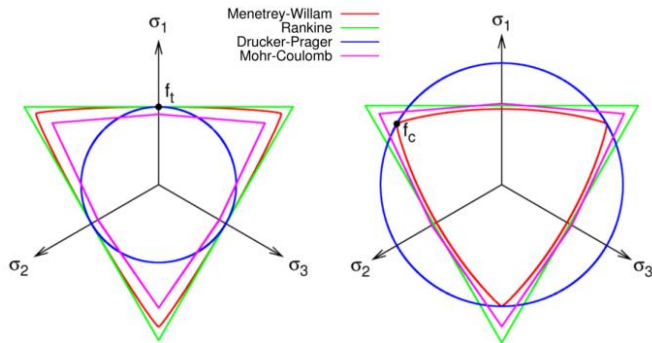
Obecně platí, že použitý zákon toku u modifikovaného Drucker-Pragerova modelu je neasociovaný. Toto umožňuje realističtější popis dilatance v chování betonu. Odpovídající plastické potenciály jsou dány vztahem

$$Q_{DP1} = \sigma_s + \delta_t\beta_t\sigma_m \text{ a } Q_{DP2} = \sigma_s + \delta_c\beta_c\sigma_m, \quad (192)$$

kde δ_t a δ_c jsou hodnoty dilatance pro tah a tlak. Ve speciálním případě $\delta_t = \delta_c = 1$ je zákon toku asociovaný.

Menetrey-Willamův model

Materiálové modely, které jsou založeny na plochách kluzu podle Drucker-Pragera nezohledňují vliv tzv. Lodeho úhlu nebo jinak třetí invariant deviatoru napětí. Vzdálenost plochy kluzu od hydrostatické osy je v deviatorové rovině konstantní. V závislosti na podmínkách zatížení nemusí být tento předpoklad pro beton platný. Menetrey-Willamův model je založen na Willam-Warnkeově ploše kluzu, která je funkcí prvního invariantu tenzoru napětí I_1 , druhého invariantu deviatoru napětí J_2 a úhlu θ .



Plochy kluzu v deviatorové rovině

$$\xi = \frac{f_t}{\sqrt{3}}$$

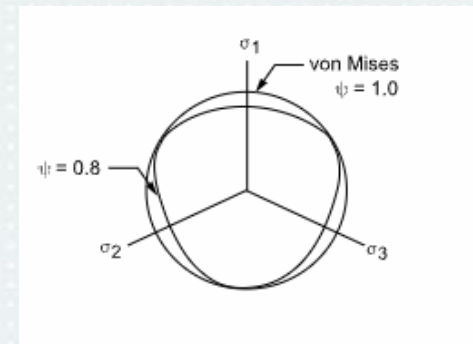
$$\xi = -\frac{f_c}{\sqrt{3}}$$

- Porovnáním plochy kluzu Menetrey-Willama modelu se standardní plochou kluzu v deviatorové rovině je vliv Lodeho úhlu zřejmý.
- Rankinova plocha kluzu a Mohr-Coulombova plocha kluzu je také závislá na Lodeho úhlu.
- Na rozdíl od Mohr-Coulombových a Rankinových ploch kluzu je Menetrey-Willamova plocha kluzu hladká.

V případě Menetrey-Willamova modelu plocha plasticity

$$F_{MW} = \frac{c_2(\kappa_c, \kappa_t)}{c_3(\kappa_c, \kappa_t)} [\sqrt{2}\xi + r(\theta, e)\varrho] + \varrho^2 - \frac{1}{c_3(\kappa_c, \kappa_t)} = 0, \quad (193)$$

$$\text{kde } r(\theta, e) = \frac{4(1 - e^2)\cos^2\theta + (2e - 1)^2}{2(1 - e^2)\cos\theta + (2e - 1)\sqrt{4(1 - e^2)\cos^2\theta + 5e^2 - 4e}}.$$



Ve vzorcích ξ , ρ a θ jsou Haigh-Westergaardovy souřadnice napětí, κ_c , κ_t jsou proměnné zpevnění v tlaku a tahu, c_2 , c_3 a e jsou parametry modelu. Haigh-Westergaardovy souřadnice napětí lze vyjádřit pomocí invariant tenzoru napětí

$$\text{a tenzoru deviatorového napětí } \xi = \frac{f_t}{\sqrt{3}} I_1, \quad \rho = \sqrt{2J_2} \quad \text{a} \quad \cos(3\theta) = \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{\sqrt{J_2^3}}.$$

Haigh-Westergaardovy souřadnice napětí odpovídají válcovému systému souřadnic, kde ρ je radiální vzdálenost od osy válce, θ je azimut a ξ je výška. Parametry modelu c_2 , c_3 a e jsou provázány s jednoosou pevností v tahu R_t a s jednoosou pevností v tlaku R_c a dvouosou pevností v tlaku R_b . Zahrnují zpevnění a změkčení v tahu a tlaku.

Plastický potenciál Menetrey-Willamova modelu nezohledňuje Lodeho úhel. Zákon toku je neasociativní.

Vztahy pro plastický potenciál

$$Q_{MW} = \rho^2 + B_g(\kappa_c, \kappa_t)\rho + C_g(\kappa_c, \kappa_t)\xi, \quad (194) \quad \arctan \frac{f_t}{\sqrt{2}f_c} < \psi < \arctan \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 35,3^\circ,$$

$$\text{kde } B_g(\kappa_c, \kappa_t) = \frac{2f_c(\kappa_t) \tan \psi - \sqrt{2}f_t(\kappa_c, \kappa_t)}{\sqrt{3}(1 - \sqrt{2} \tan \psi)}, \quad C_g(\kappa_c, \kappa_t) = \frac{B_g(\kappa_c, \kappa_t)}{\sqrt{2}} + \frac{2f_t(\kappa_c, \kappa_t)}{\sqrt{3}}.$$

Materiálové modely, které byly uvedeny se úspěšně používají pro řešení ocelových konstrukcí, keramiky, malty a prostého betonu. Modelování železobetonu se dá realizovat porůznu (11 různých nastavení materiálových modelů Rankine, Drucker-Prager a Menetrey-Willam pro beton v programu ANSYS).

Modelování železobetonu

Dělení na:

- Nelineární modely betonu s rozmazanou výztuží,
- Nelineární modely betonu s diskrétní výztuží nelineární výztuží,
- Nelineární modely betonu s trhlinami s přidáním modelu výztuže atd.

Při modelování železobetonu masivních konstrukcí se osvědčil postup, kdy se beton modeluje s užitím modifikovaného Drucker-Pragerova modelu a nebo užitím Menetrey-Willamova modelu v kombinaci s diskrétní výztuží. První z modelů je stabilnější při řešení, ale dává méně přesné výsledky. Rozdíl ve výsledcích není významný. Použití modelu betonu s trhlinami (např. Willam, K. J. a Warnke, E. D.) jde realizovat pouze u dílčích menších modelů. Přírůstky zatížení musí být malé, a i tak modely špatně konvergují. Existují další modely např. „microplane model“ (Bažant) pro postupné porušování betonu a kamene. Důležitým aspektem je možnost použitými modely řešet konstrukci jako celek a neomezovat se řešením na jednom konstrukčním prvku.

U Drucker-Pragerova modelu s diskrétní výztuží se zprvu zadávají údaje jako u lineárních modelů tj. modul pružnosti E , součinitel příčné kontrakce ν a specifickou hmotnost ρ . Dále u betonu se zadá jako minimum údajů pevnost betonu v jednoosém tahu R_t , pevnost betonu v jednoosém tlaku R_c a biaxiální pevnost betonu R_b . U oceli je nutno doplnit údaj o mezi kluzu σ_y (R_e nebo f_y) a zpevnění (sklon druhé větve aproximující jednoosou tahovou zkoušku - E_H), popřípadě použít přímo model pro betonářskou výztuž.

Prostě uložený železobetonový nosník

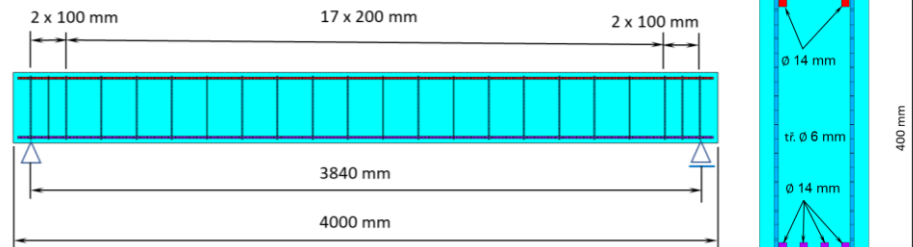
Nosník o délce 4000 mm (průřezové rozměry š. 150 mm, v. 400 mm) je z betonu třídy B35/45 a vyztužen betonářskou výztuží třídy B500B.

Podepření nosníku je 80 mm od konců. Zatížení je rovnoměrně spojitě působící na horní ploše nosníku. Vlastní tíha není uvažována.

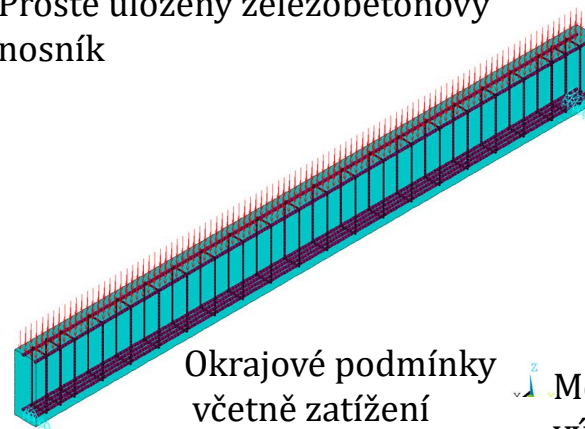
Řešení metodou konečných prvků s využitím prostorového výpočtového modelu. Použití programu ANSYS s modulem multiPlas. Dělení na konečné prvky betonu a výztuže ilustrují obrázky.

Nelineární materiálový model oceli – zjednodušeně bilineární průběh (σ - ε) s izotropním zpevněním.

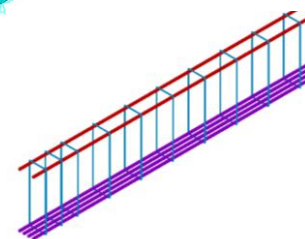
Nelineární materiálový model betonu – Menetrey-Willam (TB,CONCR,,,,MW) s exponenciálním změkčením (TB,CONCR,,,,HSD2).



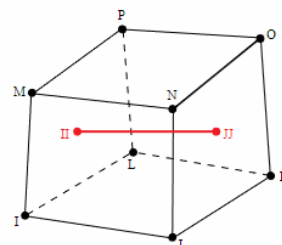
Prostě uložený železobetonový nosník



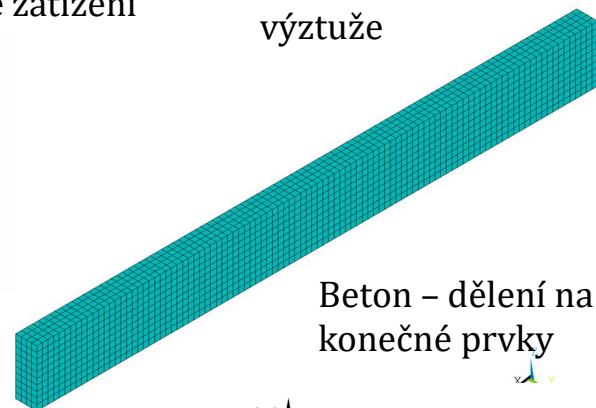
Okrajové podmínky včetně zatížení



Model diskretizované výztuže

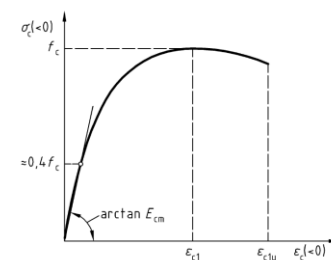


8 uzlový prvek SOLID185 a prvek REINF264 generované vazby mezi protínajícími se prvky



Beton – dělení na konečné prvky

Nelineární přetvoření betonu v tlaku:

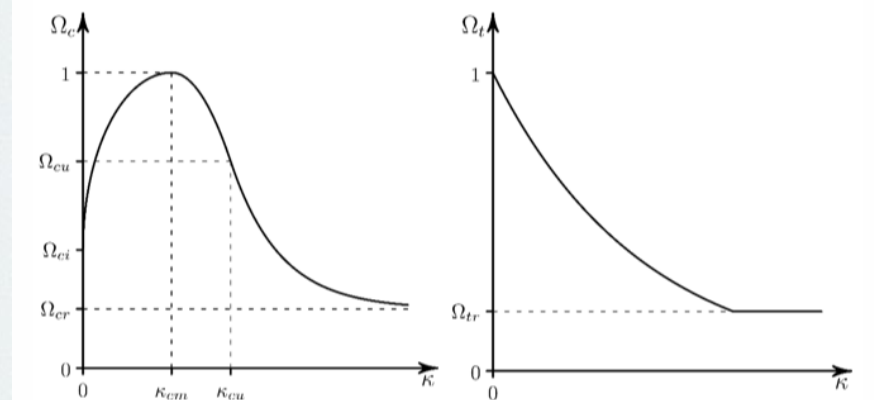


Nelineární materiálový model oceli:

modul pružnosti $E_s = 200$ GPa,
součinitel příčné kontrakce $\nu = 0,3$,
specifická hmotnost $\rho = 7850$ kg.m⁻³,
zpevnění $E_s^T = 516$ MPa.

Nelineární materiálový model betonu:

modul pružnosti $E_c = 34$ GPa,
součinitel příčné kontrakce $\nu = 0,2$,
specifická hmotnost $\rho = 2500$ kg.m⁻³,
pevnost v tlaku $R_c = 43$ MPa,
pevnost v tahu $R_t = 3,2$ MPa,
dvouosá pevnost v tlaku $R_b = 51,6$ MPa,
úhel dilatance v tahu $\delta_t = 10^\circ$,
úhel dilatance v tlaku $\delta_c = 0^\circ$,
plastické přetvoření odpovídající jednoosé pevnosti
v tlaku $\kappa_{cm} = 0,98529412 \cdot 10^{-3}$,
plastické přetvoření odpovídající přechodu
z mocninného zákona k exponenciálnímu změkčení
 $\kappa_{cu} = 2,9941176 \cdot 10^{-3}$,
relativní napětí na počátku nelineárního zpevnění
 $\Omega_{ci} = 0,4$,
reziduální (zbytkové) relativní napětí odpovídající κ_{cu}
 $\Omega_{cu} = 0,6028$,
reziduální (zbytkové) tlakové relativní napětí
 $\Omega_{cr} = 0,1$,
mód I plocha určující lomovou energii $G_{ft} = 65$ N.m⁻¹,
reziduální (zbytkové) tahové relativní napětí $\Omega_{tr} = 0,1$.



Diagramy betonu

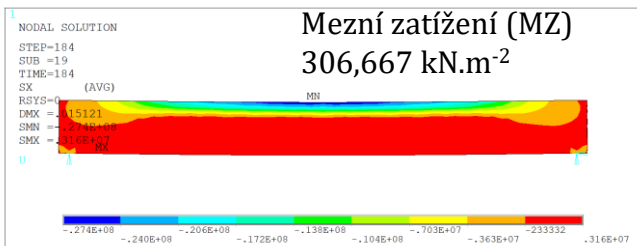
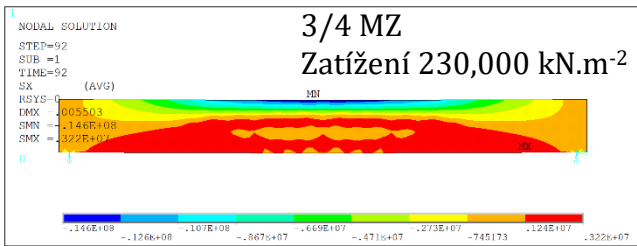
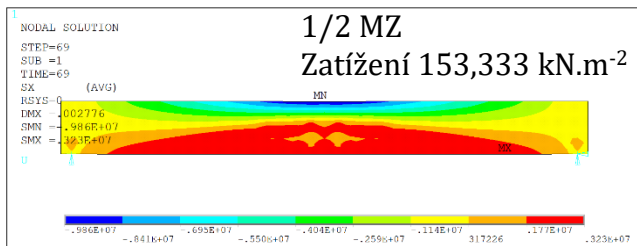
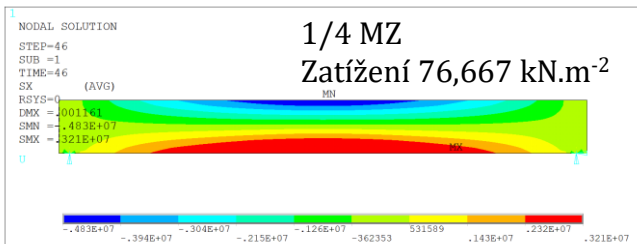
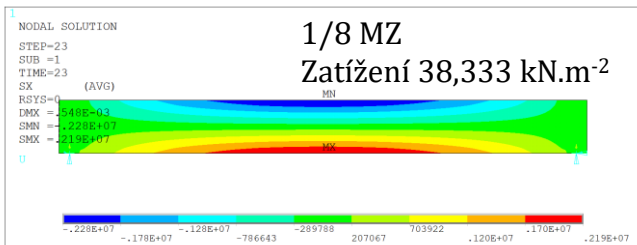
Nelineární výpočet

Zatížení přikládáno po krocích.
Přednastaveno 200 kroků (1 krok
1,666 kN.m⁻², reakce $f_z = 1000$ N).
Iterační výpočet Newton-Raphsonova
metoda. 185. krok je divergentní.

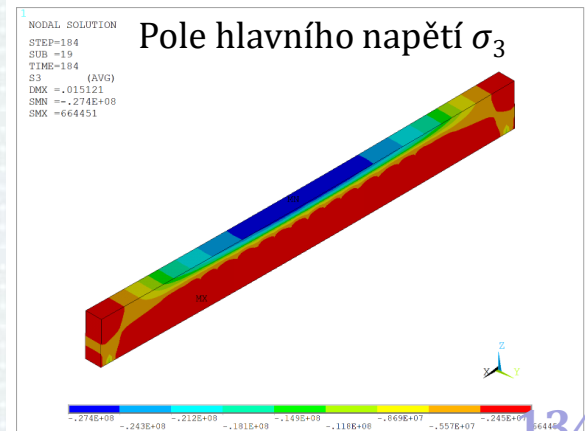
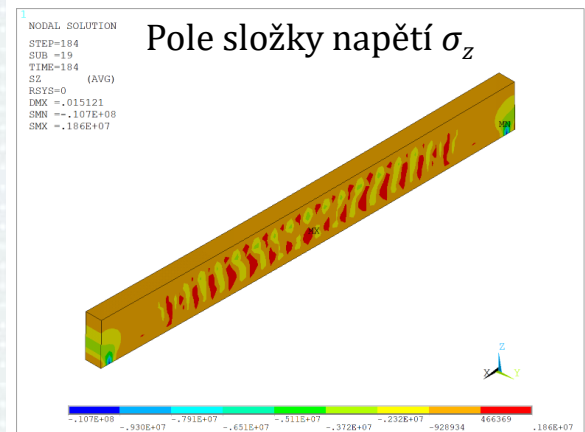
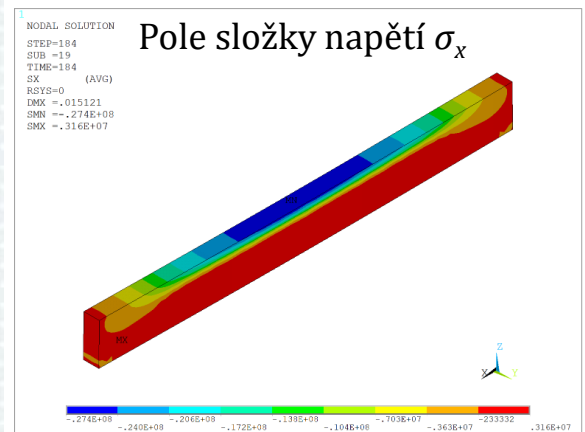
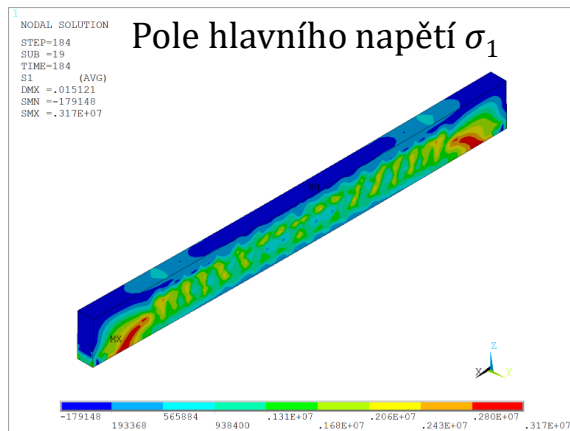
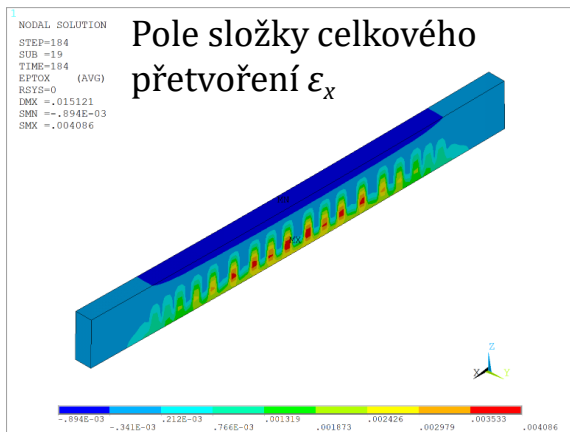
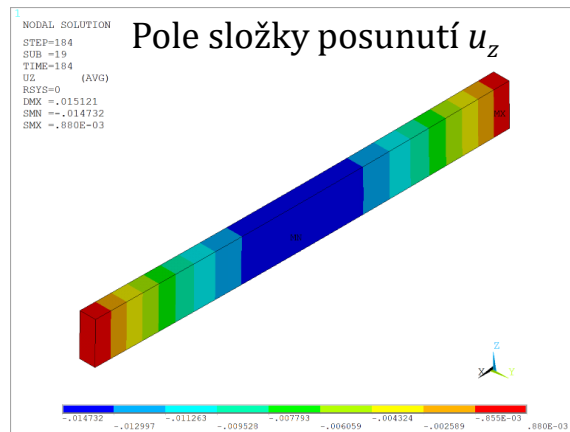
Výsledky výpočtu

Získáno řešení ve 184 krocích. Získány
hodnoty posunutí, přetvoření, napětí
v uzlech a na prvcích. Jako ukázka
nelineárního chování nosníku je
prezentována změna charakteru
průběhu pole složky napětí σ_x při
změně zatížení.

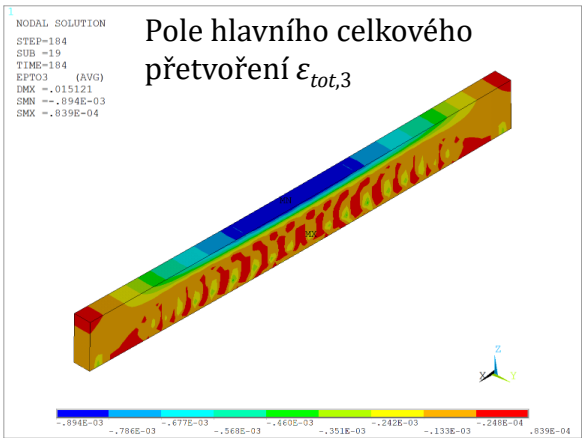
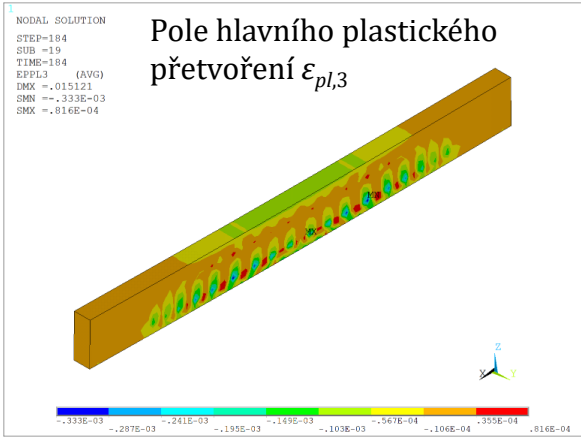
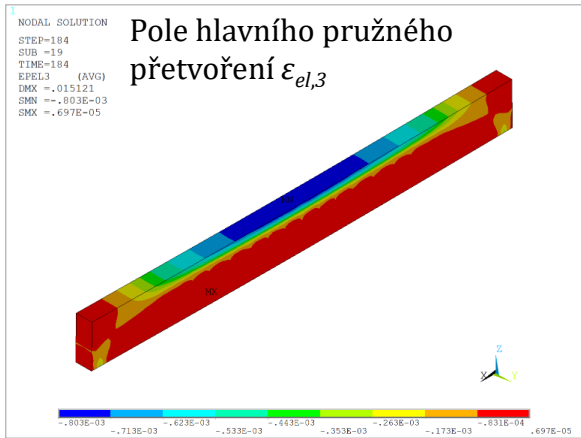
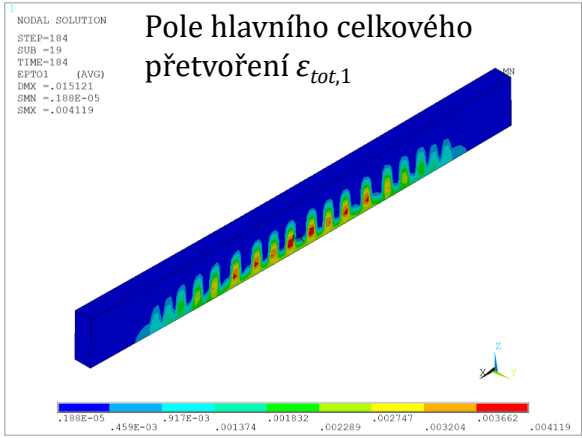
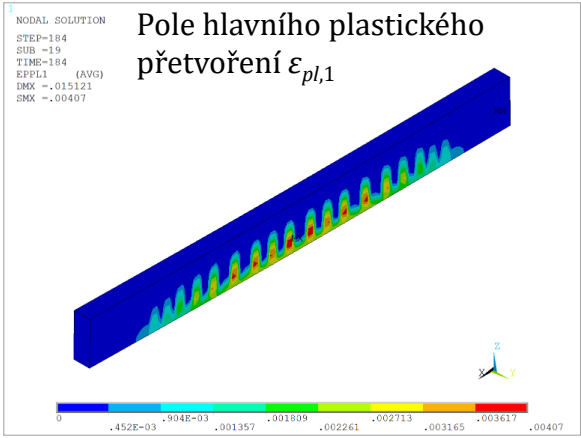
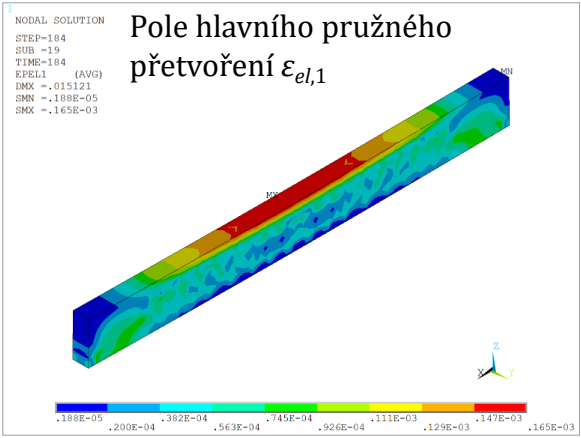
Pole složky napětí σ_x



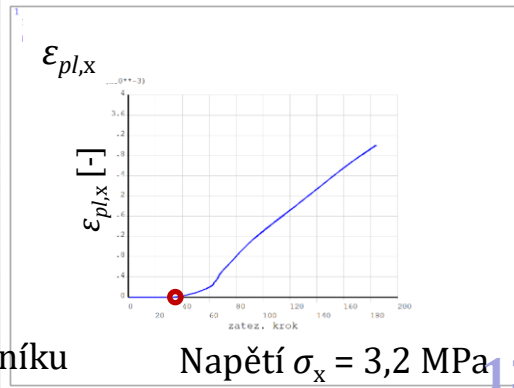
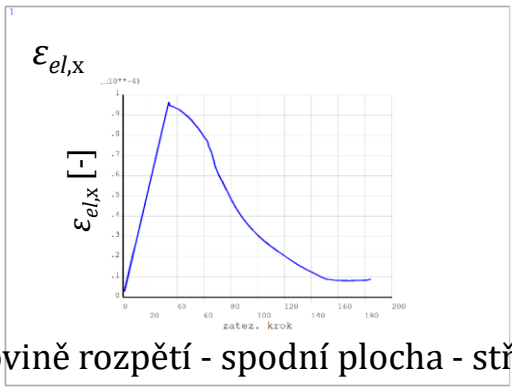
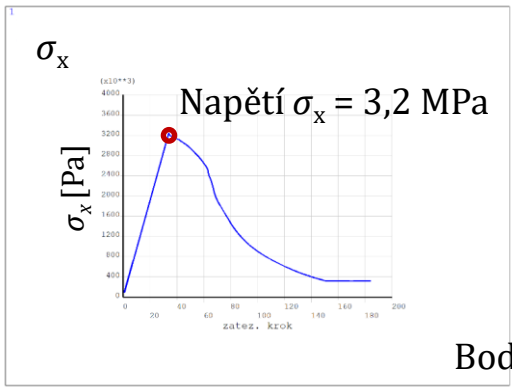
Stav betonu při mezním zatížení 306,667 kN.m⁻²



Stav betonu při mezním zatížení 306,667 kN.m⁻²



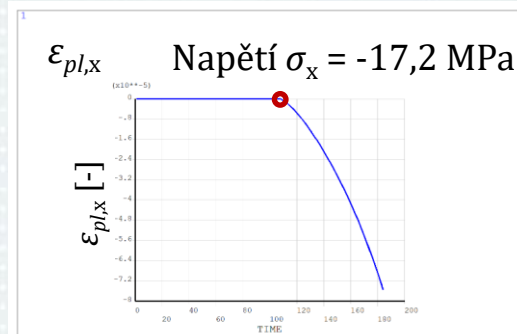
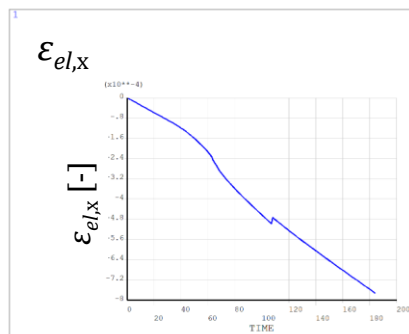
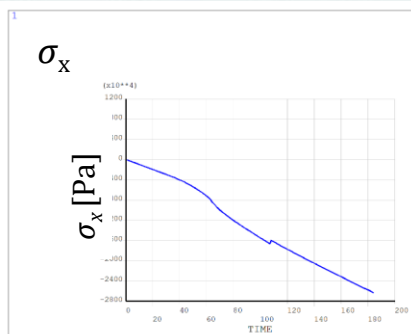
Stav betonu při postupném přitěžování z 0 kN.m⁻² do 306,667 kN.m⁻² (MZ)



Bod v polovině rozpětí - spodní plocha - střed nosníku

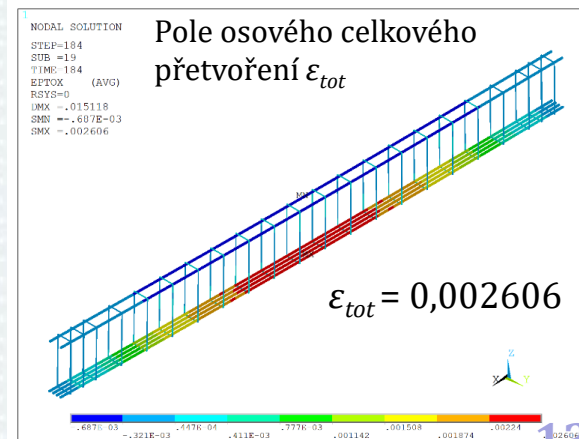
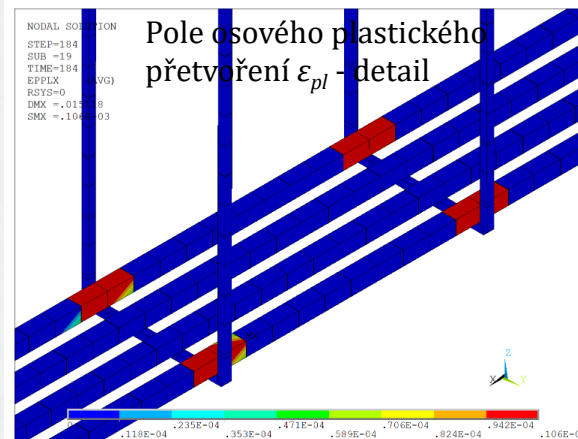
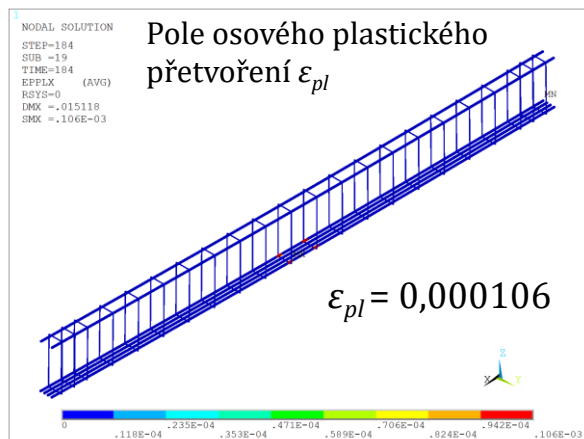
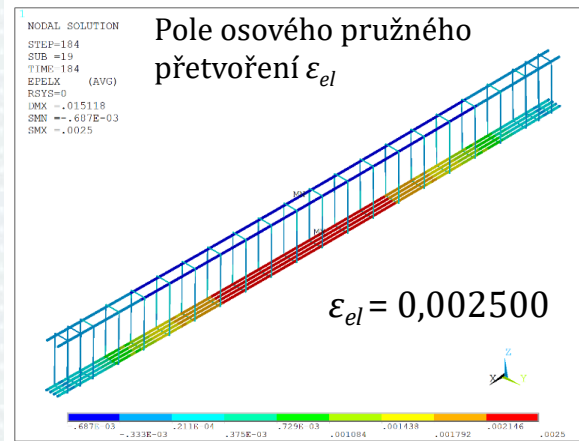
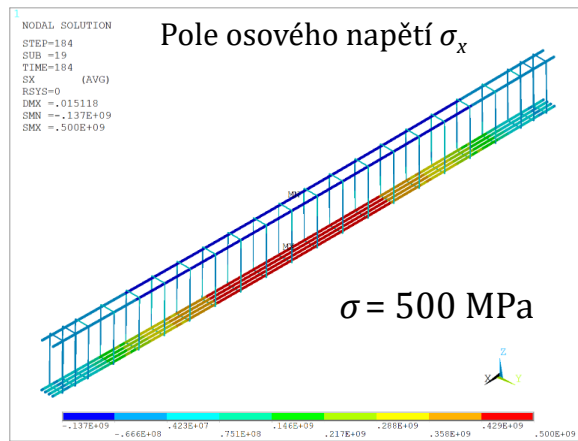
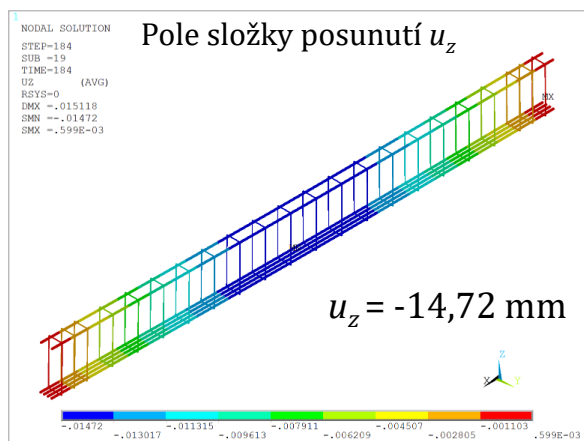
Napětí $\sigma_x = 3,2$ MPa

Stav betonu při postupném přetěžování z 0 kN.m⁻² do 306,667 kN.m⁻² (MZ)



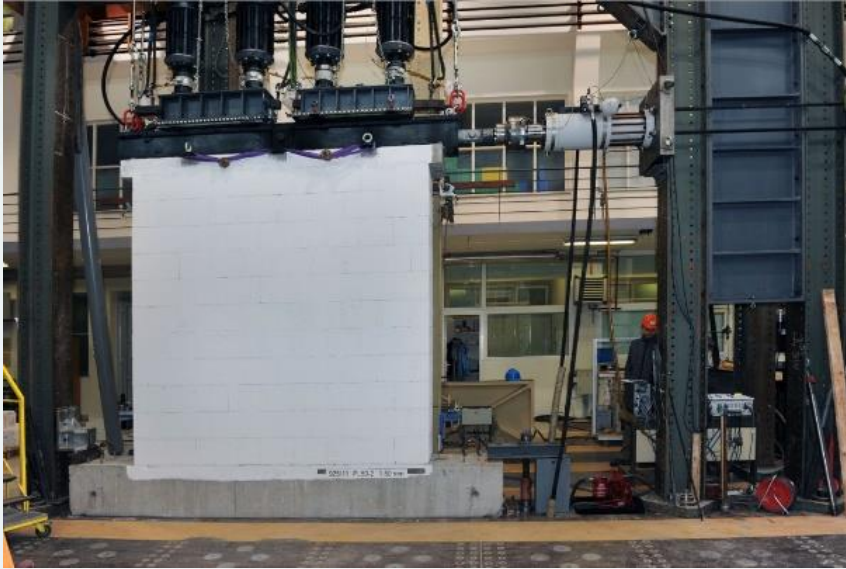
Bod v polovině rozpětí - horní plocha - střed nosníku

Stav v betonářské výztuži při mezním zatížení 306,667 kN.m⁻²

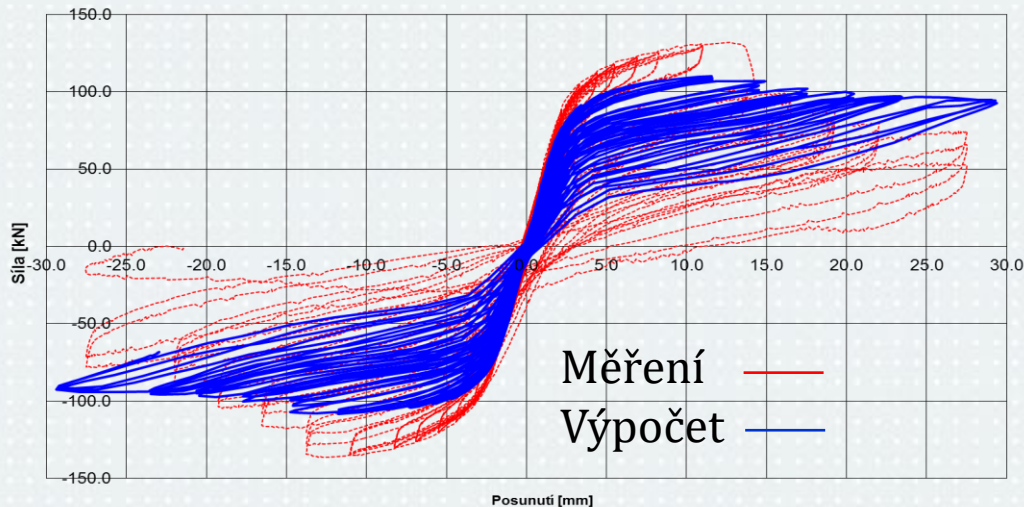


Cyklická plasticita a únava materiálu

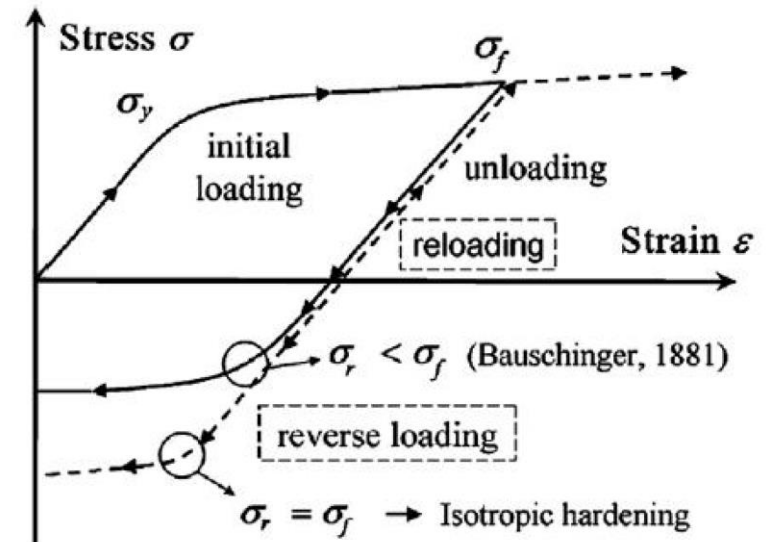
Experiment



Výsledky experimentu a výpočtu – úzká stěna



Bauschingerův efekt



Model úzké stěny

